Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Омский государственный аграрный университет имени П.А. Столыпина»

Университетский колледж агробизнеса

ППССЗ по специальности 36.02.01 Ветеринария

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ
по дисциплине

Математические методы решения прикладных задач

Специальность: **36.02.01 Ветеринария**

Ведущий преподаватель (руководитель) дисциплины	Е.И. Терещенко

Омск 2023

Пояснительная записка

Методические рекомендации по учебной дисциплине **Математические методы решения прикладных задач** предназначены для выполнения самостоятельной работы обучающимися по специальности 36.02.01 Ветеринария.

Самостоятельная работа выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Целью самостоятельной работы является овладение обучающимся умениями работать с источниками, аргументации собственной точки зрения.

Методические рекомендации по самостоятельной работе студентов содержат материалы для подготовки к лекционным, практическим занятиям, к формам текущего и промежуточного контроля.

Предложенные в рекомендациях задания позволят успешно овладеть профессиональными знаниями, умениями и навыками, и направлены на формирование общих и профессиональных компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.1. Контроль санитарного и зоогигиенического состояния объектов животноводства и кормов

Основная задача обучения математике для среднего профессионального образования заключается в обеспечении прочного и сознательного овладения обучающимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования, а также в профессиональной деятельности, требующей достаточной высокой математической культуры, а так же закрепление, углубление и расширение знаний учебной дисциплины; приобретение студентами умений и навыков использования современных научно-технических средств, при решении конкретных практических задач.

При выполнении самостоятельной работы обучающийся самостоятельно осуществляет сбор, изучение, систематизацию и анализ информации, а затем оформляет информацию и представляет на оценку преподавателя или группы.

Виды самостоятельной работы

№ п/п	Вид самостоятельной работы	Форма контроля	Максимальное кол-во баллов
1.	Работа с источниками	Устный ответ на занятии	5
2.	Составление опорного конспекта (можно схему)	Опорный конспект	5
3.	Составление кроссворда	Письменные работы	5
4.	Решение практических задач	Письменные работы	5
5	Тестирование по индивидуальным тестам	Тестовые задания	5
6	Участие в научно-исследовательской деятельности	Выступление на конференции, конкурсах, олимпиадах	5
7	Итоговая проверка (в виде экзамена)	Промежуточная аттестация	5

Методические рекомендации по работе с источниками

Работа с источниками осуществляется с целью приобретения обучающимся навыков самостоятельного изучения учебного материала. Работа с источниками является важной составляющей при подготовке к занятиям.

Для подготовки к устному опросу необходимо прочитать текст источника, выделить главное, составить план ответа, повторить текст несколько раз. На учебном занятии полно, точно, доступно, правильно, взаимосвязано и логично изложить материал, иллюстрируя при необходимости примерами.

Работа с источником может быть предложена в форме аннотирования. Аннотация позволяет составить обобщенное представление об источнике. Для составления аннотации необходимо ответить на следующие вопросы:

1. Фамилия автора, полное наименование работы, место и год издания.
2. Вид издания (статья, учебник, и пр.)
3. Цели и задачи издания.
4. Структура издания и краткий обзор содержания работы.
5. Основные проблемы, затронутые автором.
6. Выводы и предложения автора по решению выделенных проблем.

Источник аннотирования определяет преподаватель, он же оценивает аннотацию, сданную в письменной форме.

Методические рекомендации по выполнению тестовых заданий

Выполнение тестовых заданий по дисциплине проводятся с целью проверки знаний студентов. Тестирование позволяет путем поиска правильного ответа и разбора допущенных ошибок лучше усвоить тот или иной материал по предмету.

При выполнении тестовых заданий необходимо учитывать:

1. Тесты рассчитаны на самостоятельную работу без использования вспомогательных материалов.
2. Для выполнения тестового задания, прежде всего, следует внимательно прочитать поставленный вопрос.

3. После ознакомления с вопросом следует приступать к прочтению предлагаемых вариантов ответа.
4. Необходимо прочитать все варианты и в качестве правильного ответа выбрать один индекс (цифровое либо буквенное обозначение).
5. Если в тестовом задании правильных ответов несколько, то это должно указываться в задании.
6. Баллы начисляются за задание, выполненное в полном объеме: так, если в задании предусмотрено два правильных ответа, а отмечен только один, выполнение данного задания оценивается нулем баллов.
7. Заданий, где правильный вариант отсутствует, в тесте не предусмотрено.
8. На выполнение теста отводится ограниченное время. Оно может варьироваться в зависимости от уровня тестируемых, сложности и объема теста. Как правило, время выполнения тестового задания определяется из расчета 30-45 секунд на один вопрос.

Методические рекомендации по составлению опорного конспекта

Опорный конспект составляется с целью обобщения, систематизации и краткого изложения информации. Составление опорного конспекта способствует более быстрому запоминанию учебного материала.

Составление опорного конспекта включает следующие действия:

1. Изучение текста учебного материала.
2. Определение главного и второстепенного в анализируемом тексте.
3. Установление логической последовательности между элементами.
4. Составление характеристики элементов учебного материала в краткой форме.
5. Выбор опорных сигналов для расстановки акцентов.
6. Оформление опорного конспекта.

Опорный конспект может быть представлен в виде схемы с использованием стрелок для определения связи между элементами; системы геометрических фигур; логической лестницы и т.д.

Оценкой опорного конспекта может служить качество ответа, как самого студента, так и других студентов его использовавших. Преподаватель также может проверить опорные конспекты, сданные в письменной форме. Допускается проведение конкурса на самый лучший конспект по следующим критериям: краткость формы; логичность изложения; наглядность выполнения; универсальность содержания.

Методические рекомендации по составлению кроссворда.

Кроссворды составляется с целью отображения информации в графическом виде для развития эрудиции, расширения словарного запаса, тренировки памяти, внимания. При составлении кроссвордов необходимо придерживаться принципов наглядности и доступности.

1. Кроссворд должен состоять из 7- 20 слов по заданной теме.
2. Кроссворд должен быть "Классический"
3. Оформлен на листе формата А4, вместе с вопросами
4. К кроссворду должны быть ответы на другом листе формата А4
5. На листе с кроссвордом и листе с ответами должны быть указаны тема кроссворда, № группы и автор работы.
6. Не допускается наличие "плашек" (незаполненных клеток) в сетке кроссворда.
7. Не допускаются случайные буквосочетания и пересечения.
8. Загаданные слова должны быть именами существительными в именительном падеже единственного числа.
9. Двухбуквенные слова должны иметь два пересечения.

10. Не допускаются аббревиатуры (ПО ПК и т.д.), сокращения (ур-я и др.).
11. Не рекомендуется большое количество двухбуквенных слов.
12. Все тексты должны быть написаны разборчиво, желательно отпечатаны.

Готовая работа представляется на контроль в письменном виде.

Методические рекомендации по решению практических задач

Практические задачи решаются с целью закрепить изученный материал и сформировать определенные умения и навыки, выработать у студента способность самостоятельно решать поставленные задачи, лаконично и структурировано формулировать ответ.

При решении задач студентам можно рекомендовать такую основную схему:

1) вспомнить теоретическую часть по теме;
2) выполнить решение примеров (задач), согласно образцу.

Объем задания определяет преподаватель.

Методические рекомендации по подготовке обучающихся к экзамену

По дисциплине проводится устный экзамен. Экзамен проводится с использованием комплекта билетов. Количество билетов превышает количество учащихся в группе. Экзаменационные билеты содержат один теоретический вопрос и два практических задания.

1. В соответствии с утвержденными датой, временем и местом проведения обучающийся приходит на экзамен.

2. Для сдачи экзамена по данной дисциплине у обучающегося при себе должны быть только ручка и зачетная книжка. Зачетную книжку обучающийся сдает преподавателю.

3. Расположив на столе экзаменационные билеты в произвольном порядке, преподаватель приглашает к столу учащегося. Обучающийся произвольно выбирает неидентифицируемый внешне экзаменационный билет.

4. Обучающийся озвучивает преподавателю свои Ф.И.О. и номер билета, получает от преподавателя чистый лист для записей, занимает указанное место в аудитории. Одновременно в аудитории готовится к ответу не более 5 человек.

5. В течение установленного времени обучающийся готовится к устному ответу на экзаменационный билет. Время подготовки к ответу, в зависимости от сложности предмета 20-40 мин. Преподаватель визуально контролирует процесс подготовки.

6. По истечение установленного времени или при готовности ранее установленного времени обучающийся отвечает преподавателю на вопросы экзаменационного билета. После ответа преподаватель может задать дополнительные или уточняющие вопросы. По итогам ответов обучающегося преподаватель выставляет экзаменационную оценку, фиксируя ее в зачетке, экзаменационной ведомости, журнале учебной группы.

7. Учащиеся, нарушающие дисциплину (устраивающие переговоры, списывающие и т.д.) лишаются права сдавать экзамен.

Задания для самостоятельной работы

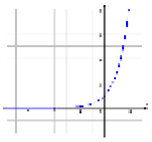
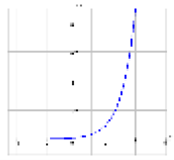
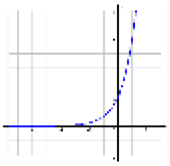
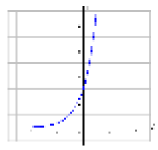
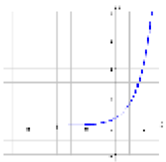
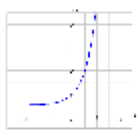
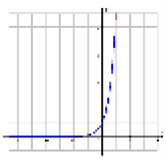
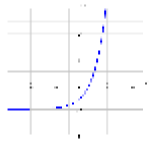
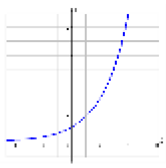
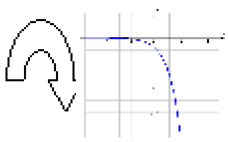
Самостоятельная работа №1

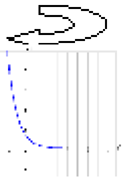
Тема: «Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований»

Цели: обобщить и систематизировать умения и навыки построения графиков показательной и логарифмической функций

Задание 1. Изучите построение графиков. Оформить построение графиков функции в тетради.

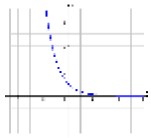
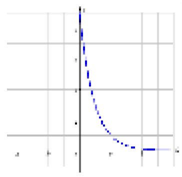
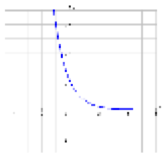
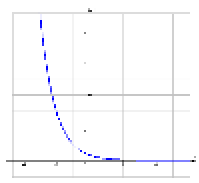
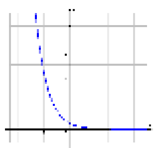
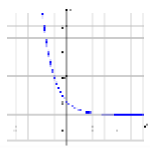
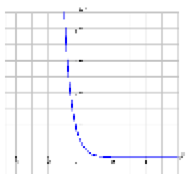
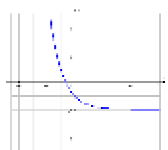
Преобразование графиков показательной (возрастающей) функции.

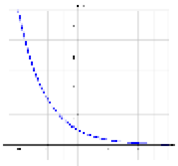
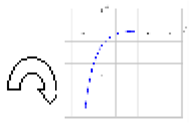
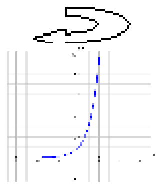
№	*Формула, комментарий*	*Графическая иллюстрация*	*№*	*Формула, комментарий*	*Графическая иллюстрация*
1	$y = 3^x$ «Основной» график		6	$y = 3^{x-2}$ Параллельный перенос (сдвиг) вдоль оси ОХ вправо на 2 единичных отрезка	
2	$y = 2 \cdot 3^x$ Растяжение вдоль оси ОУ в 2 раза		7	$y = 3^{x+1}$ Параллельный перенос (сдвиг) вдоль оси ОХ влево на 1 единичный отрезок	
3	$y = \frac{3^x}{2}$ Сжатие вдоль оси ОУ в 2 раза		8	$y = 3^x + 1$ Параллельный перенос (сдвиг) вдоль оси ОУ вверх на 1 единичный отрезок	
4	$y = 3^{2x}$ Сжатие вдоль оси ОХ в 2 раза		9	$y = 3^x - 2$ Параллельный перенос (сдвиг) вдоль оси ОУ вниз на 2 единичных отрезка	
5	$y = 3^{\frac{x}{2}}$ Растяжение вдоль оси ОХ в 2 раза		10	$y = -\left(3^x\right)$ Поворот на 180^0 вокруг оси ОХ	

			11	$y = 3^{(-x)}$ Поворот на 180^0 вокруг оси OY	

Все графики функций построены относительно «основного» графика $y = 3^x$

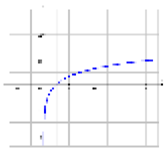
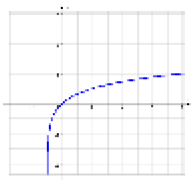
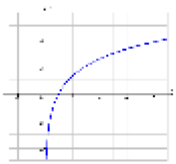
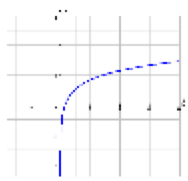
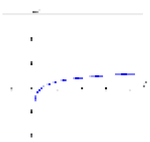
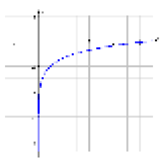
Преобразование графиков показательной (убывающей) функции.

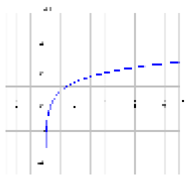
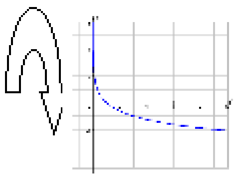
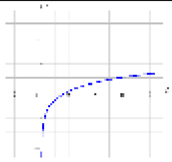
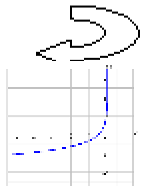
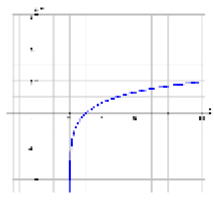
№	*Формула, комментарий*	*Графическая иллюстрация*	*№*	*Формула, комментарий*	*Графическая иллюстрация*
1	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ «Основной» график		6	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$ Параллельный перенос (сдвиг) вдоль оси OX вправо на 2единичных отрезка	
2	$y = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ Растяжение вдоль оси OY в 2 раза		7	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ Параллельный перенос (сдвиг) вдоль оси OX влево на 1 единичный отрезок	
3	$y = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ Сжатие вдоль оси OY в 2 раза		8	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$ Параллельный перенос (сдвиг) вдоль оси OY вверх на 1 единичный отрезок	
4	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ Сжатие вдоль оси OX в 2 раза		9	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$ Параллельный перенос (сдвиг) вдоль оси OY вниз на 2	

				единичных отрезка	
5	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}}$ <u>Растяжение</u> вдоль оси ОХ в 2 раза		10	$y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ <u>Поворот</u> на 180^0 вокруг оси ОХ	
			11	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ <u>Поворот</u> на 180^0 вокруг оси ОY	

Все графики функций построены относительно <u>«основного» графика</u> **y** $=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$

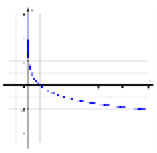
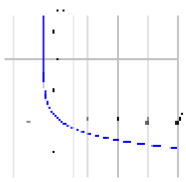
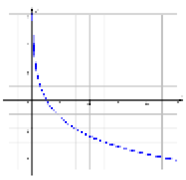
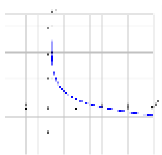
Преобразование графиков логарифмической (возрастающей) функции.

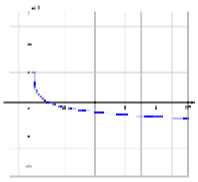
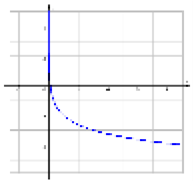
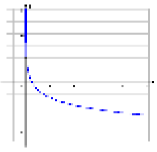
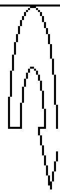
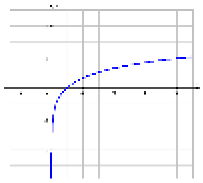
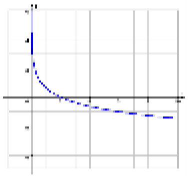
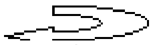
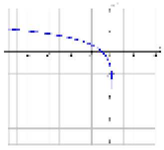
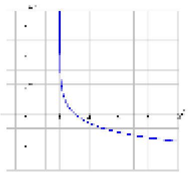
№	*Формула, комментарий*	*Графическая иллюстрация*	*№*	*Формула, комментарий*	*Графическая иллюстрация*
1	$y = \log_3 x$ «Основной» график		7	$y = \log_3(x+1)$ <u>Параллельный перенос (сдвиг)</u> вдоль оси ОХ влево на 1 единичный отрезок	
2	$y = 2 \cdot \log_3$ <u>Растяжение</u> вдоль оси ОУ в 2 раза		8	$y = 1 + \log_3 x$ <u>Параллельный перенос (сдвиг)</u> вдоль оси ОУ вверх на 1 единичный отрезок	
3	$y = \frac{1}{2}\log_3 x$ <u>Сжатие</u> вдоль оси ОУ в 2 раза		9	$y = -2 + \log_3 x$ <u>Параллельный перенос (сдвиг)</u> вдоль оси ОУ вниз на 2 единичных отрезка	

4	$y = \log_3(2x)$ <u>Сжатие</u> вдоль оси ОХ в 2 раза		10	$y = -\log_3 x$ <u>Поворот</u> на 180^0 вокруг оси ОХ	
5	$y = \log_3 \frac{x}{2}$ <u>Растяжение</u> вдоль оси ОХ в 2 раза		11	$y = \log_3(-x)$ <u>Поворот</u> на 180^0 вокруг оси ОY	
6	$y = \log_3(x -$ <u>Параллельный перенос (сдвиг)</u> вдоль оси ОХ вправо на 2 единичных отрезка				

Все графики функций построены относительно <u>«основного» графика</u> $y = \log_3 x$

Преобразование графиков логарифмической (убывающей) функции

№	*Формула, комментарий*	*Графическая иллюстрация*	№	*Формула, комментарий*	*Графическая иллюстрация*
1	$y = \log_{\frac{1}{3}} x$ «Основной» график		7	$y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ <u>Параллельный перенос (сдвиг)</u> вдоль оси ОХ влево на 1 единичный отрезок	
2	$y = 2 \cdot \log_{\frac{1}{3}}$ <u>Растяжение</u> вдоль оси ОУ в 2 раза		8	$y = 1 + \log_{\frac{1}{3}} x$ <u>Параллельный перенос (сдвиг)</u> вдоль оси ОУ вверх на 1 единичный отрезок	

3	$y=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}x$ Сжатие вдоль оси ОУ в 2 раза		9	$y=-2+\log_{\frac{1}{3}}x$ Параллельный перенос (сдвиг) вдоль оси ОУ вниз на 2 единичных отрезка	
4	$y=\log_{\frac{1}{3}}(2x)$ Сжатие вдоль оси ОХ в 2 раза		10	$y=-\log_{\frac{1}{3}}x$ Поворот на 180^0 вокруг оси ОХ	 
5	$y=\log_{\frac{1}{3}}\frac{x}{2}$ Растяжение вдоль оси ОХ в 2 раза		11	$y=\log_{\frac{1}{3}}(-x)$ Поворот на 180^0 вокруг оси OY	 
6	$y=\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$ Параллельный перенос (сдвиг) вдоль оси ОХ вправо на 2 единичных отрезка				

Задание 2. Постройте графики функции (в соответствии со своим вариантом).

№	Показательная функция $y=a^x$		Логарифмическая функция	
	Возрастающая $a>1$	Убывающая $0<a<1$	Возрастающая $a>1$	Убывающая $0<a<1$

1	$y=4^x$	$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$	$y=\log_4 x$	$y=\log_{\frac{1}{4}} x$
2	$y=2\cdot 4^x$	$y=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x$	$y=2\cdot\log_4 x$	$y=2\cdot\log_{\frac{1}{4}} x$
3	$y=\frac{4^x}{2}$	$y=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x$	$y=\frac{1}{2}\log_4 x$	$y=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}} x$
4	$y=4^{2x}$	$y=\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}$	$y=\log_4(2x)$	$y=\log_{\frac{1}{4}}(2x)$
5	$y=4^{\frac{x}{2}}$	$y=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}}$	$y=\log_4 \frac{x}{2}$	$y=\log_{\frac{1}{4}} \frac{x}{2}$
6	$y=4^{x-2}$	$y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$	$y=\log_4(x-2)$	$y=\log_{\frac{1}{4}}(x-2)$
7	$y=4^{x+1}$	$y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$	$y=\log_4(x+1)$	$y=\log_{\frac{1}{4}}(x+1)$
8	$y=4^x+1$	$y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}+1$	$y=1+\log_4 x$	$y=1+\log_{\frac{1}{4}} x$
9	$y=4^x-2$	$y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}-2$	$y=-2+\log_4 x$	$y=-2+\log_{\frac{1}{4}} x$
10	$y=-\left(4^x\right)$	$y=-\left(\frac{1}{4}\right)^x$	$y=-\log_4 x$	$y=-\log_{\frac{1}{4}} x$
11	$y=4^{-x}$	$y=\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$	$y=\log_4(-x)$	$y=\log_{\frac{1}{4}}(-x)$

Задание 3. Постройте графики показательной или логарифмической функции (в соответствии со своим вариантом).

Вариант 1 Построить график функции $y=log_2 x$	**Вариант 2** Построить график функции $y=3^x+1$	**Вариант 3** Построить график функции $y=\log_{0,5} x-1$	**Вариант 4** Построить график функции $y=0,5^x$
Вариант 5 Построить график функции $y=\log_{0,2} x$	**Вариант 6** Построить график функции $y=\log_3 x$	**Вариант 7** Построить график функции $y=-4^x$	**Вариант 8** Построить график функции $y=\log_5 x$
Вариант 9 Построить график функции $y=log_2 x-1$	**Вариант 10** Построить график функции $y=0,5^x+1$	**Вариант 11** Построить график функции $y=log_3 x-3$	**Вариант 12** Построить график функции $y=-5^x$
Вариант 13 Построить график функции $y=3^x-2$	**Вариант 14** Построить график функции $y=0,3^x-2$	**Вариант 15** Построить график функции $y=log_{0,2}(x-1)$	**Вариант 16** Построить график функции $y=log_3(x-1)$
Вариант 17 Построить график функции $y=3^{x+2}$	**Вариант 18** Построить график функции $y=-3^x+1$	**Вариант 19** Построить график функции $y=log_3 x+3$	**Вариант 20** Построить график функции $y=\log_5(x+1)$
Вариант 21 Построить график функции $y=\log_{0,5}(x+1)$	**Вариант 22** Построить график функции $y=-\log_{0,5} x$	**Вариант 23** Построить график функции $y=5^{x+2}$	**Вариант 24** Построить график функции $y=5^{x-2}$
Вариант 25 Построить график функции $y=\log_5(x+2)$	**Вариант 26** Построить график функции $y=\log_5 x+2$	**Вариант 27** Построить график функции $y=-\log_5 x$	**Вариант 28** Построить график функции $y=0,3^x+1$

Самостоятельная работа №2

Тема: «Определение предела функции. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы»

Цели: сформировать умение находить пределы последовательностей и пределы функций, использовать замечательные пределы для нахождения пределов.

Задание 1. Подготовиться к устному опросу, ответив на следующие вопросы:

1. Что такое предел функции?
2. Что такое предел функции слева?
3. Что такое предел функции справа?
4. Какие пределы называются односторонними?

5. Какой предел называют пределом на бесконечности?
6. Перечистите теоремы о пределах?
7. Сколько замечательных пределов вы знаете? Их формулировки?

Задание 2. Рассмотрите образцы вычисления пределов и решите другие задания самостоятельно

Пример 1. Вычислите пределы: $\lim_{x\to 2}(4x^2 - 6x + 3)$

Решение: Используя теоремы о пределах, надо найти сумму и разность пределов, а потом просто подставить двойку в функцию, стоящую под знаком предела:

$\lim_{x\to 2}(4x^2 - 6x + 3) = \lim_{x\to 2} 4x^2 - \lim_{x\to 2} 6x + \lim_{x\to 2} 3 = 4 * 2^2 - 6 * 2 + 3 = 7$

Ответ: $\lim_{x\to 2}(4x^2 - 6x + 3)=7$

Пример 2. Вычислите пределы: $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{2x}$

Решение: $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{2x} = \frac{5}{\infty} = 0$

Ответ: $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{2x} = 0$

Если имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то необходимы преобразования.

Пример 3. Вычислите пределы: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2}$

Решение: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2} = \frac{1-5+4}{1-3+2} = \frac{0}{0}$

Числитель и знаменатель дроби при x=1 равны $\left(\frac{0}{0}\right)$. Выполним тождественное преобразование (разложение числителя и знаменателяна множители и сократить на общий множитель)

$x^2 - 5x + 4 = 0$

Д=b^2-4ac, д =25-4*1*4= 25 – 16 =9.

$X_1=\frac{5+3}{2}=4$ и $X_2=\frac{5-3}{2}=1$

$x^2 - 5x + 4=(x-1)(x-4)$

Аналогично знаменатель: $x^2 - 3x + 2=(x-1)(x-2)$.

Подставляем: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-4}{x-2} = \frac{-3}{-1} = 3$

Ответ: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2} = 3$

Пример 4. Вычислите пределы: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$

Решение: Числитель и знаменатель дроби при x=∞ равны $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Необходимо использовать преобразование: деление числителя и знаменателя на максимальную степень x (в данном примере максимальная степень равна 2). Учитывая, что величина обратная бесконечно большой величине есть бесконечно малая величина, раскроем исходную неопределенность, либо вынести переменную в наибольшей степени в числители и знаменатели дроби и сократить на наибольшую степень.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x^2}^{\to 0}+\frac{1}{x}^{\to 0}+3}=\frac{2}{3}$$

Ответ: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{2}{3}$

Пример 5. Вычислите пределы: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}$

Решение: В этом примере пределы числителя и знаменателя при $x\to 0$ равны нулю. Необходимо числитель и знаменатель умножить на выражение, сопряженное числителю.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+x-2+x}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{5(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=$$

$$\frac{\lim_{x\to 0}2}{5\lim_{x\to 0}(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{2}{5*2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$$

Ответ: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

Примеры для самостоятельного решения: Вычислите пределы функций:

$\lim_{x\to 2}x^2$ $\lim_{x\to 9}(2x-4\sqrt{x})$ $\lim_{x\to 8}\frac{2x-4}{\sqrt[3]{x}+x}$ $\lim_{x\to 1}\frac{3x^3+2x^2+x+2}{5x^2-x-2}$ $\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}-3x)$

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x$ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x$

$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}$ $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$ $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$ $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}$

$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{4x+12}$ $\lim_{x\to 0}\frac{2x^3-2x^2}{8x^3-2x^2}$ $\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+7x+6}{(x+2)^2}$ $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x-4}$ $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^3-1}$

$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{7-x}-3}$ $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$ $\lim_{x\to 0}\frac{6x^4-5x^3+x^2}{4x}$ $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-8x+15}{x^2-25}$

$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$ $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+3x^3}$

$\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ $\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x+5}{6x^2+3x-1}$ $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+2}{-x^2-4x+7}$ $\lim_{x\to\infty}\frac{5x+2}{15x+7}$ $\lim_{x\to\infty}\frac{9x^7+3x+5}{3x^7+8x-12}$ $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 6x}$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{3x}$ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{x}$

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{3x}$ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x}$ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x}$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

Самостоятельная работа №3

Тема: «Вычисление производных функций. применение производной к решению практических задач»

Цели: сформировать умение находить производные функций, заданных в явном, логарифмическом и параметрическом виде, находить производные сложных функций, знать геометрический смысл производной. Повторить, обобщить и систематизировать знания о физическом смысле первой производной, способствовать выработке навыков в применении производной к решению задач.

Задание 1. Составьте конспект по теме (используя методические рекомендации).

Задание 2. Найти производные от функции:

1. $y=\frac{x^4}{4}-3x^2+6x-2$
2. $y=\frac{2x^5}{3}-\frac{3}{x}+x$
3. $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{3x^3}$
4. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}$
5. $y=\frac{1}{x}+2\sqrt[3]{x}-23$
6. $y=\left(x+\sqrt{x}\right)^2$
7. $y=\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$
8. $y=\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}$
9. $y = 2\operatorname{tg} x - 3\cos x$
10. $y = 7\sin x + 5e^{x}$
11. $y=\sqrt{x}+\operatorname{ctg} x$
12. $y=2\sqrt[5]{x^3}+\ln x$
13. $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}-e^x$
14. $y=1-\frac{\cos x}{4}$
15. $y= 2\sin x - 6\operatorname{tg} x$
16. $y=\frac{e^x}{\sqrt{5}}-\frac{\ln x}{\sqrt{3}}$
17. $y=x^4+ctg\,x$
18. $y=\frac{1}{2x}-e^x+\frac{1}{3}\ln x$
19. $y=\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\sin x$
20. $y=\sqrt[3]{x}-2\sqrt[4]{x}$
21. $y=\frac{tg\,x+\ln x}{4}$
22. $y=\sqrt{2}\sin x-\frac{ctg\,x}{5}$
23. $y=5\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+2\sqrt[5]{x}$
24. $y=e^x-\sin x+\cos x$
25. $y=\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^2$
26. $y=\left(3x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$
27. $y=\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{3}{\sqrt[4]{x^5}}+x^4$
28. $y=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2$
29. $y=\frac{3}{x}-e^x+\frac{\ln x}{3}$
30. $y = \sin x \cos x$
31. $y=(x^2+x)\ln x$
32. $y=\operatorname{tg} x\, e^x$
33. $y = \operatorname{ctg} x \cos x$
34. $y=\sin x\cdot\left(\frac{x}{2}+\sqrt{x}\right)$
35. $y=(\sin x-\cos x)^2$
36. $y=\frac{x-1}{x+1}$

37. y=$\frac{x^2-2x}{\sin x}$

38. y=$\frac{\cos x}{x+2}$

39. y=$\frac{tg\, x}{\sqrt{x}}$

40. y=$\frac{e^x-3x^4}{\cos x}$

41. y=$\frac{x^2+3x-1}{x^2-1}$

42. y=$(\sin x + e^x)^2$

43. y=$\frac{(x-1)^2}{\ln x}$

44. y=$\frac{e^x-2\sin x}{x-\cos x}$

45. y=$\frac{\ln x-3x}{tg\, x}$

46. y=$\frac{tg\, x+\cos x}{\sqrt{x}}$

47. y=$\sqrt[3]{x^4}\sin x$

48. y=$(x+1)^2 e^x$

49. y=$\frac{2x-3}{4x^2+1}$

50. y=$\frac{\sin x-4x}{ctg\, x}$

51. y=$\cos x \cdot \left(\frac{x}{3}+x^2\right)$

52. y = sin x tg x

53. y = ctg x cos x

54. y=$(3x+2)^2 \cdot e^x$

55. y=$\frac{tg\, x+\cos x}{x^3-2x}$

56. y=$(\cos x + e^x)^2$

57. y=$\frac{e^x-2tg\, x}{x-ctg\, x}$

58. y=$\frac{\sin x \cdot e^x}{x^2}$

59. y=$\frac{ctg\, x}{(x^2-x)}$

Производная сложной функции

1. $y = \sin(6x-1)$
2. $y = \cos(5x+6)$
3. $y = \ln(3x+2)$
4. $y = e^{3x}$
5. $y = e^{-2x+3}$
6. $y = tg(8x-21)$
7. $y = (4+6x)^3$
8. $y = \sin(2-3x)$
9. $y = \ln(12x-5)$
10. $y = (12-4x)^5$
11. $y = \ln(x^2+1)$
12. $y = \ln(6x-8)$
13. $y = e^{3x^2-4}$
14. $y = e^{x^2-4x+5}$
15. $y = \arcsin 3x$
16. $y = \arccos 2x$
17. $y = (5-3x)^4$
18. $y = \sin(x+2)$
19. y=$ctg^3(x-2x^2)$
20. y=$\sqrt[3]{\sin 3x}$
21. y=$\sqrt{x^2-3x+2}$
22. y=$\frac{e^{2x}-e^{-3x}}{\sqrt{x}+1}$
23. y=$\ln(x^4+3x-2)$
24. y=$(\sin 4x+1)^5$
25. y=$\frac{1}{\sqrt[3]{(2x-\sin 3x)^2}}$
26. y=$\frac{1}{(1+\cos 4x)^7}$
27. y=$(tg\, 4x+3)^3$
28. y=$\sin 3x \cdot e^{4x^2-3x}$
29. $h(x)=\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}$.
30. y=$sin^3\frac{3x}{4}$
31. y=$cos^2 5x$
32. y=$\sin 3x \cos 5x$
33. y=$(tg\, 3x+\cos 2x)^2$

Самостоятельная работа №4

Тема: «Нахождение неопределенных интегралов различными и методами. вычисление определенных интегралов»

Цели: Закрепить умения интегрировать функцию, используя таблицу основных интегралов; закрепить навыки нахождения неопределенных интегралов различными способами; площади криволинейной трапеции.

Задание 1. Таблица интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$ $\quad \int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1} + C, \; n \neq -1, k \neq 0$

2. $\int dx = x + C$ $\quad \int k dx = kx + C$ $\quad \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ $\quad \int \frac{1}{kx+b} dx = \frac{1}{k} \cdot \ln(kx+b) + C, \quad k \neq 0$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\quad \int \sin(kx+b)\, dx = -\frac{1}{k} \cdot \cos(kx+b) + C, \quad k \neq 0$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\quad \int \cos(kx+b)\, dx = \frac{1}{k} \cdot \sin(kx+b) + C, \quad k \neq 0$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C \; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}.$ $\quad \int \frac{dx}{\cos x} = ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right| + C$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C \; x \neq \pi n, \; n \in \mathbf{Z}$ $\quad \int \frac{dx}{\sin x} = ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C$

8. $\int tg\, x\, dx = -ln|\cos x| + C$

9. $\int ctg\, x\, dx = ln|\sin x| + C$

10. $\int e^x dx = e^x + C$ $\quad \int e^{kx+b} dx = \frac{1}{k} \cdot e^{kx+b} + C, \quad k \neq 0$

11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \; (a > 0)$

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C, \; |u| > |a|, \; a \neq 0.$

15. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ $\quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, a \neq 0$

16. $\int \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C, \; a \neq 0$

17. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C, \; a \neq 0$

Используя таблицу интегралов, вычислите неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{3}{2t} dt$
2. $\int 3e^u du$
3. $\int x^2(1+2x)\, dx$
4. $\int \frac{3dx}{4\sqrt[4]{x}}$
5. $\int x^3(1+5x)dx$

6. $\int \frac{x\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}}$

7. $\int \frac{(x^2-3)^2}{x^4}dx$

8. $\int \frac{x^3+2}{\sqrt{x}}dx$

9. $\int \left(x+\sqrt{x}-3x^5-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{sin^2 x}\right)dx$

10. $\int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)dx$

11. $\int \frac{2\sqrt{x}}{5x\cdot\sqrt[3]{x}}dx$

12. $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}}dx$

13. $\int e^x(1-\frac{e^{-x}}{x^2})dx$

14. $\int \frac{1-sin^3 x}{sin^2 x}dx$

15. $\int \frac{e^{2x}+e^x \sin x}{e^x}dx$

Задание 2: Вычислить интегралы, используя замену переменной

1. $\int (3x+\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}dx$

2. $\int (\frac{1}{2}x+0{,}5)^{\frac{2}{3}}dx$

3. $\int \cos(\frac{4}{5}x-2)\,dx$

4. $\int \sin\frac{2x}{3}dx$

5. $\int \frac{dx}{sin^2(6x+1)}$

6. $\int \frac{dx}{cos^2(2-9x)}$

7. $\int \frac{dx}{3x+1}$

8. $\int \sqrt{3-5x}\,dx$

9. $\int \sqrt[5]{(2x+3)^2}\,dx$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4x+1)^3}}$

11. $\int \frac{4dx}{(3-2x)^6}$

12. $\int (2\cos(\frac{x}{6}-1)-5e^{2x+\frac{1}{3}})\,dx$

13. $\int \left(\frac{e^{2x}+e^{-3x}}{\sqrt{3}}\right)dx$

14. $\int e^{2x}(1-\frac{e^{-2x}}{x^3})dx$

15. $\int \frac{5-sin^3(4x+1)}{sin^2(4x+1)}dx$

Задание 3. Метод интегрирования по частям**.**

1. $\int x\cos x dx$
2. $\int (6-5x)e^x\,dx$
3. $\int x\ln x\,dx$
4. $\int (5x+8)e^x dx$
5. $\int (4-5x)e^x dx$
6. $\int 4x\ln x dx$
7. $\int 5x\ln x dx$
8. $\int 3x\ln x dx$
9. $\int (7-9x)\cos x dx$
10. $\int (1+x)\sin x dx$

Задание 4. Рассмотрите примеры вычисления определенных интегралов и следующие решите самостоятельно

1. . Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot dx$.

Решение. $\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin \pi/2 - \sin 0 = 1 - 0 = 1$.

2. Вычислить интеграл $\int_4^9 \left(\frac{2x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot dx$.

Решение. На основании свойств определенного интеграла и формулы Ньютона-Лейбница получаем

$$\int_4^9 \left(\frac{2x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot dx = \int_4^9 \frac{2x}{5} \cdot dx + \int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_4^9 + \sqrt{x}\Big|_4^9 = \frac{1}{5} \cdot \left(9^2 - 4^2\right) + \left(\sqrt{9} - \sqrt{4}\right) = \frac{1}{5} \cdot 65 + 1 = 14.$$

Примеры: 1. $\int_0^2 \mathrm{x}\, dx$

2. $\int_0^2 2\mathrm{x}\, dx$

3. $\int_0^2 x^2\, dx$

4. $\int_1^2 x^3\, dx$

5. $\int_0^3 x^4\, dx$

6. $\int_1^2 (2\mathrm{x} + 2)\, dx$

7. $\int_{-1}^1 (5\mathrm{x} - 3)\, dx$

8. $\int_1^2 (4\mathrm{x} + 2)\, dx$

9. $\int_{-2}^2 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1)\, dx$

10. $\int_{-1}^0 (x^3 + 2x)\, dx$

11. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^3}$

12. $\int_0^4 \sqrt{\mathrm{x}}\, dx$

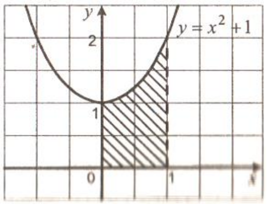
13. $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

14. $\int_1^4 (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})\, dx$

15. $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\, dx$

Задание 5. 1. Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 1.

а) $\frac{4}{3}$;



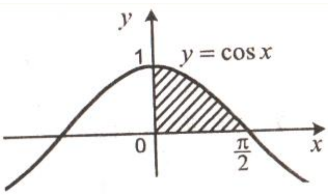
б) $\frac{1}{3}$;

в) 1; (рис. 1)

г) 2.

2. Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 2.

а) 1;



б) 2;

в) $2\frac{1}{2}$; (рис.2)

г) $1\frac{1}{2}$.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямой $y = 5–x$.

а) 4,8;

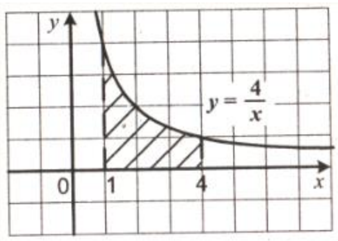
б) 5,5;

в) 4,2;

г) 4,5.

4. Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображённой на рисунке 3.

а) 4;



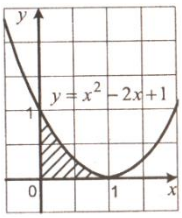
б) ln 4;

в) –4ln 4;

г) 4ln 4. (рис. 3)

5. Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображённой на рисунке 4.

а) $\frac{1}{2}$;



б) $\frac{1}{3}$;

в) 1; (рис.4)

г) $\frac{2}{3}$.

6. Найдите площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{3}{x}$ и прямыми $y = 3$ и $x = 3$.

а) 4 – 3ln3;

б) 6 – 3ln3;

в) 6 – 3ln2;

г) 8 – 2ln3.

7. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y= 3x–x^2$, касательной, проведенной до данной параболы в точке с абсциссою $x_0=3$, и осью ординат.

а) 7;

б) 8;

в) 11;

г) 9.

8. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболами $y=x^2$ и $y= 2x–x^2$.

а) $\frac{1}{2}$;

б) $\frac{2}{3}$;

в) $\frac{1}{3}$;

г) $\frac{1}{5}$.

Самостоятельная работа №5
Тема: «Действия с матрицами. Нахождение обратной матрицы»
Цели: Закрепить навыки определения размера и вида матриц; выполнения сложения и вычитания матриц, умножения матриц на число, транспонирование матриц; выполнения умножения матриц, возведения матриц в степень; вычисления определителей второго и третьего порядка и применения свойств определителей; вычисления обратной матрицы.
Задание 1. Составьте кроссворд по теме (используя методические рекомендации)

Задание 2. Рассмотреть образцы выполнения действий над матрицами и нахождение определителей.

ОБРАЗЕЦ: Выполнить действия: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Решение. Выполним решение по действиям.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*1+2*1+3*2 & 1*2+2*1+3*4 & 1*3+2*3+3*5 \\ 1*1+1*1+3*2 & 1*2+1*1+3*4 & 1*3+1*3+3*5 \\ 2*1+4*1+5*2 & 2*2+4*1+5*4 & 2*3+4*3+5*5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 16 & 24 \\ 8 & 15 & 21 \\ 16 & 28 & 43 \end{pmatrix}.$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \\ 6 & 5 & 15 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 16 & 24 \\ 8 & 15 & 21 \\ 16 & 28 & 43 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \\ 6 & 5 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 21 \\ 5 & 12 & 12 \\ 10 & 23 & 28 \end{pmatrix}$.

ОБРАЗЕЦ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Произведение $A \cdot \mathrm{B}$ не определено, так как число столбцов матрицы A (3) не совпадает с числом строк матрицы B (2).

Произведение $B \cdot A$ определено.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot1+3\cdot0 \\ 1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ОБРАЗЕЦ : Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Решение. Для вычисления определителя третьего порядка будем использовать известную формулу Саррюса (правило треугольников), которое может быть записано следующей формулой:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{23}a_{12} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{33}a_{21}a_{12} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1*5*9 + 7*6*2 + 3*8*4 - 7*5*3 - 9*4*2 - 1*8*6 = 0$$ **Ответ: 0.**

Задание 3. Аналогично заданию 2 , выполните следующие задания письменно в тетради.

1. Найти сумму, разность, произведения двух матриц А и В(если это возможно).

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -10 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

ж) $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -8 & 3\end{pmatrix}$;

з) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 0 & -4\\ -8 & 0\end{pmatrix}$

2. Даны матрицы A. B и C. Показать, что (AB)·C=A·(BC).

а) $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}4 & 8 & -4\\ -8 & 0 & 1\end{pmatrix}$

б) $A=\begin{pmatrix}4 & 8 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\\ 0 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 8\end{pmatrix}$

3. Вычислить (3A – 2B)·C, если

$A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -8\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ -8 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

4. Найти A^3, если

а) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

5. Найти матрицу X, если 3A+2X=B, где

$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

6. Найти ABC, если

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 8\end{pmatrix}$.

7. Вычислить определители

а) $\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}4 & 8\\ 0 & 4\end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix}3 & -3\\ 2 & -4\end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix}\sin\alpha & -\cos\alpha\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix}$.

8. С помощью правила треугольников вычислить определители

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \\ -8 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

9. Найти обратную матрицу:

а) $A = (8)$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; ж) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; з) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$;

и) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; к) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; л) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

м) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; н) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$.

Самостоятельная работа №6

Тема: «Решение систем линейных уравнений различными методами»

Цели: закрепить навыки выполнения сложения и вычитания матриц, умножения матриц на число, транспонирование матриц; выполнения умножения матриц, возведения матриц в степень; вычисления определителей второго и третьего порядка и применения свойств определителей; вычисления обратной матрицы; решения систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

Задание 1. Рассмотреть решение систем методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение:

Решим систему матричным способом, для этого вычислим обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$, где A_{ij} - алгебраические дополнения к элементам матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\5&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$$\Delta A=\begin{vmatrix}3&-1&1\\5&1&2\\1&1&2\end{vmatrix}=6-2+5-1+10-6=12\neq 0$$ - матрица невырожденная.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}=0$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5&2\\1&2\end{vmatrix}=-(10-2)=-8$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5&1\\1&1\end{vmatrix}=5-1=4$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1&1\\1&2\end{vmatrix}=-(-2-1)=3$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}=6-1=5$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3&-1\\1&1\end{vmatrix}=-(3+1)=-4$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1&1\\1&2\end{vmatrix}=-2-1=-3$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3&1\\5&2\end{vmatrix}=-(6-5)=-1 \quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3&-1\\5&1\end{vmatrix}=3+5=8$$

$$A^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0&3&-3\\-8&5&-1\\4&-4&8\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0&3&-3\\-8&5&-1\\4&-4&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12\\3\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0\cdot 12&3\cdot 3&(-3)\cdot 3\\-8\cdot 12&5\cdot 3&(-1)\cdot 3\\4*12&(-4)\cdot 3&8\cdot 3\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0\\-84\\60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-7\\5\end{pmatrix}$$

Решим систему методом Крамера.

Главный определитель системы:

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. Разложим определитель по элементам первой строки, пользуясь формулой

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

Запишем и вычислим вспомогательные определители

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 12 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 12 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 12 \cdot 8 + 12 = -84$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 12 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 + 12 + 12 \cdot 4 = 60$$ Тогда

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{0}{12} = 0$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = -\frac{84}{12} = -7$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{60}{12} = 5$$

Ответ: $(0; -7; 5)$

Решим систему **методом Гаусса**, для этого составим расширенную матрицу системы и упростим ее приведением к треугольному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right)$$

Таким образом, система равносильна системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ \quad x_2 + \frac{5}{4}x_3 = -\frac{3}{4} \\ \qquad -3x_3 = -15 \end{cases}$$

Находим $x_3 = 5$

$$x_2 = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} \cdot 5 = -\frac{28}{4} = -7$$

$$x_1 = 12 - 7 - 5 = 0$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -7$, $x_3 = 5$

При решении всеми методами одной и той же системы, мы получим один ответ.

Задание 2.Выполнить в тетради (по вариантам).

Тест по теме: «Матрицы. Определители. Системы линейных алгебраических уравнений».

Вариант 1.

Задания уровня А:

1**. Выберите единичную матрицу из числа предложенных:**

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Укажите матрицу A^t, если матрица А=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Выберите вектор – столбец из числа предложенных матриц

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. **Найдите сумму матриц $2A+5B$, если** $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

1) $\begin{pmatrix}35 & 56\\ 35 & -7\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}19 & 31\\ 22 & 1\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}16 & 25\\ 13 & -8\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}5 & 8\\ 5 & -1\end{pmatrix}$.

5. **Найдите сумму матриц A^t+B^t, если** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$

1) $\begin{pmatrix}3 & 0\\ 3 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & 3 & -1\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

6. **Найдите A^2, если** $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

1) $\begin{pmatrix}1 & 4\\ 9 & 1\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}0 & 7\\ 7 & 0\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 6 & 2\end{pmatrix}$.

7. **Найдите произведение матриц $A\cdot B$, если** $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -5\\ 3 & 3\end{pmatrix}$

1) произведение $A\cdot B$ не определено;

3) $\begin{pmatrix}-6 & -20\\ -2 & -2\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}2 & -8 & 0\\ 0 & -5 & 3\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}-6 & -2\\ -20 & -2\end{pmatrix}$.

8. **Найдите произведение матриц $2A\cdot B$, если** $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

1) $\begin{pmatrix}-6 & 0 & -2\\ 0 & 4 & 0\\ -10 & -4 & -4\end{pmatrix}$;

3) произведение $2A\cdot B$ не определено;

2) $\begin{pmatrix}-3 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -5 & -2 & -2\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}-6 & 0 & -10\\ 0 & 4 & -4\\ -2 & 0 & -4\end{pmatrix}$.

9. Как изменится определитель при транспонировании матрицы?

1) определитель не изменится;

2) знак определителя поменяется на противоположный;

3) значение определителя удвоится;

4) определитель примет значение, обратное исходному.

10. Вычислите определитель 2-го порядка $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

1) -7;

2) -5;

3) 1;

4) 5.

11. Вычислите определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

1) 98;

2) -30;

3) 90;

4) 104.

12. Выберите невырожденную матрицу из числа предложенных

1) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

13. Найдите минор m_{12} соответствующего элемента определителя $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$

1) -2;

2) 13;

3) -5;

4) 5.

14. Найдите алгебраическое дополнение A_{23} соответствующего элемента матрицы $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1) -18;

2) -19;

3) 18;

4) 19.

15. Найдите значение x, решив уравнение $\begin{vmatrix} x & 2 & x \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

1) $\frac{10}{7}$;

3) $\frac{10}{3}$;

2) 0;

4) $-\frac{2}{3}$.

Задания уровня В:

1. **Найдите матрицу, обратную данной** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

2. Решите систему линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

3. Вычислите определитель 4-го порядка $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Тест по теме: «<u>Матрицы. Определители. Системы линейных алгебраических уравнений</u>».

<u>Вариант 2.</u>

Задания уровня А:

1. Выберите треугольную матрицу из числа предложенных:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Укажите матрицу A^t, если матрица $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Выберите вектор – строку из числа предложенных матриц

1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Найдите разность матриц $3A - 2B$**, если** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-10} \end{pmatrix}$

1) $\begin{pmatrix} 6 & 27 \\ -7 & 32 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 14 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 56 & 3 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$.

5. Найдите сумму матриц $A^t + B$**, если** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

1) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Найдите $\boldsymbol{B}^2$**, если** $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} -7 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Найдите произведение матриц $A \cdot B$**, если** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 15 & 4 & -5 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 15 \\ 1 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4) произведение $A \cdot B$ не определено;

8. Найдите произведение матриц $\frac{\boldsymbol{A}}{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{B}$**, если** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

1) произведение $\frac{A}{2} \cdot B$ не определено;

2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

9. Как изменится определитель при перестановке двух его параллельных рядов?

1) определитель не изменится;

2) знак определителя поменяется на противоположный;

3) значение определителя удвоится;

4) определитель примет значение, обратное исходному.

10. Вычислите определитель 2-го порядка $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$

1) -17;

2) 13;

3) 3;

4) -13.

11. Вычислите определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

1) 92;

2) 72;

3) 56;

4) 54.

12. Выберите вырожденную матрицу из числа предложенных.

1) $\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

13. Найдите минор m_{21} соответствующего элемента определителя $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

1) -10;

2) 3;

3) 4;

4) -4.

14. Найдите алгебраическое дополнение A_{32} соответствующего элемента матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

1) 50;
2) 9;
3) -50;
4) -9.

15. Найдите значение x, решив уравнение $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ x & 3 & x \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

1) 6;

2) 9;

3) 18;

4) -18.

Задания уровень В:

1. Найдите матрицу, обратную данной $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

2. Решите систему линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

3. Вычислите определитель 4-го порядка $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

Самостоятельная работа №7

Тема: «Решение систем линейных уравнений методами линейной алгебры»

Цели: сформировать умение применять нахождение обратной матрицы при решении прикладных задач.

Задание 1. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: 1) по формулам Крамера, 2) методом Гаусса, 3)с помощью обратной матрицы (по вариантам)

1. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$	2. $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + 2y - z = 3 \\ 4x - y + z = 5 \end{cases}$	4. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y - z = 2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$	6. $\begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ x + y + 5z = -1 \end{cases}$	8. $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \\ 4x + 3y + 3z = 5 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 3x - y - z = -1 \\ -2x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$	10. $\begin{cases} x + z = 4 \\ 2y - z = 1 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$
11. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + 5z = 3 \end{cases}$	12. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$
13. $\begin{cases} 2x - 2y - 3z = 3 \\ x + y + 2z = -1 \\ 2x - y - z = 2 \end{cases}$	14. $\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ x + 3y - z = 3 \\ 2x - y - 2z = 6 \end{cases}$
15. $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$	16. $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$
17. $\begin{cases} 2x + 3y + z = -3 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - y - z = -7 \end{cases}$	18. $\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 3x + 4y + 2z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$
19. $\begin{cases} 5x - 2y - 2z = 3 \\ 3x + 2y + z = 3 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$	20. $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ -2x + z = -1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y + 2z = 4 \\ x - y + 4z = -2 \end{cases}$	22. $\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ x + 3y - 2z = -2 \end{cases}$
23. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$	24. $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$
25. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$	26. $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + y - 2z = -3 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$
27. $\begin{cases} x + 5y + z = -7 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$	28. $\begin{cases} 2x + 4y - 3z = 2 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x - 2y + z = -5 \end{cases}$
29. $\begin{cases} 3x - 3y + 2z = -4 \\ 2x + y - 3z = -1 \\ x - 2y + 5z = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 5x + 8y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$ 30.
31. $\begin{cases} 3x + 4y + z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ x + 2y + 2z = -4 \end{cases}$	32. $\begin{cases} x - 2y + 2z = -1 \\ 2x + y - z = -7 \\ x - 5y + 2z = 2 \end{cases}$
$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - 3y - z = -7 \\ 4x + y - 2z = 0 \end{cases}$ 33.	34. $\begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ 5x + y + 2z = 3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$
35. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 = -3 \end{cases}$	36. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$
37. $\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = -1 \\ x - y + 5z = -2 \end{cases}$	38. $\begin{cases} x + y - z = -2; \\ 4x - 3y + z = 1; \\ 2x + y = 5. \end{cases}$
39. $\begin{cases} x - 2y + 4z = 0 \\ 3x - 2y + 5z = 5 \\ 2x - 4y + 5z = -3 \end{cases}$	40. $\begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ -x + 2y + 3z = 12 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$

Самостоятельная работа № 8

Тема: «Комплексные числа и действия над ними»
Цели: Закрепить выполнение арифметических действий над числами. Закрепить навыки выполнения действий над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной форме записи.
Задание 1 . Сделать конспект по теме.

Краткая теория. *Комплексное число* – это выражение вида $z = x + iy$, где *x, y* – вещественные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – *мнимая единица*. Первое из вещественных чисел, *x*, называется *вещественной (действительной) частью* комплексного числа (используется обозначение $x = \operatorname{Re} z$); второе, *y*, - *мнимой частью* ($y = \operatorname{Im} z$). Выражение (1) называют *алгебраической формой записи комплексного числа*.

Числом, *сопряженным* к $z = x + iy$, называют число вида $\bar{z} = x - iy$. Используя формулу разности квадратов, получаем, что $z\bar{z} = x^2 + y^2$. Можно доказать, что корнями квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом являются два сопряженных комплексных числа.

ПРИМЕР 1. 1.1.Решить уравнение $x^2 - 6x + 18 = 0$.

Решение. Дискриминант данного уравнения: $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 36 - 72 = -36$ меньше нуля, но теперь мы можем воспользоваться мнимой единицей:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 6\,i}{2}, \text{ т.е. } x_1 = 3 + 3i; \quad x_2 = 3 - 3i.$$

Справедливы следующие *правила арифметических действий над комплексными числами* $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$:

1.2. $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ (осуществляется сложение или вычитание алгебраических двучленов и приведение подобных);

1.3. $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1 y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ (осуществляется перемножение алгебраических двучленов и приведение подобных с учетом того, что $i^2 = -1$);

1.4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \dfrac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ (эта операция возможна только в случае, когда $z_2 \neq 0 + i0 = 0$).

ПРИМЕР 2. Вычислить $z = \dfrac{2 - 7i}{3 + 4i}$ и указать вещественную и мнимую части полученного комплексного числа.

Решение. Действуя в соответствии с правилами получаем:

$$z=\frac{2-7i}{3+4i}=\frac{(2-7i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{6-8i-21i+28i^2}{9-16i^2}=\frac{6-29i-28}{9+16}=\frac{-22-29i}{25}=-\frac{22}{25}-\frac{29}{25}i\,;$$

поэтому $\operatorname{Re} z=-\frac{22}{25}$, $\operatorname{Im} z=-\frac{29}{25}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Каждому комплексному числу можно поставить в соответствие точку *M(x;y)* на декартовой плоскости (при этом на оси *OX* располагаются вещественные числа $z=x+i0=x$, а на оси *OY* – чисто мнимые числа $z=0+iy=iy$).

Модулем комплексного числа назовем длину отрезка $|OM|$ (или расстояние от начала координат до точки *M*), т.е. $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Аргументом комплексного числа ($\varphi=\operatorname{Arg}z$) назовем угол, который вектор $\overline{OM}$ образует с положительным направлением оси OX. Главное значение аргумента, которое, как правило, используется при осуществлении действий с комплексными числами, удовлетворяет условию $0\le\varphi<2\pi$. При этом выражение вида $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой записи комплексного числа*.

Преобразуем

$$z=x+iy=\sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=|z|\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

и, получаем, что аргумент *z* можно найти, решив систему

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{x}{|z|}\\ \sin\varphi=\dfrac{y}{|z|}\end{cases}$$

ПРИМЕР 3. Записать комплексное число в тригонометрической форме $z=1-i\sqrt{3}$, указать модуль и аргумент комплексного числа.

Решение. По определению $|z|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$. Для определения аргумента воспользуемся формулой: $\begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi=\dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Получаем, что $\varphi=\arg z=\dfrac{5\pi}{3}$. Тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид: $z=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

Возведение в степень и извлечение корней. Если комплексное число задано тригонометрической формой $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то справедлива формула Муавра $z^n=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$. (1.4)

Для извлечения корня *n*-й степени (*n* – целое число, большее 1) из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, применяется формула, дающая *n* значений этого корня:

$$z_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,\ldots,n-1. \quad (1.5)$$

ПРИМЕР 4. Вычислить: a) $(-1+i)^{13}$; b) $\sqrt[3]{-1}$.

Решение. В задании a), чтобы воспользоваться формулой Муавра, необходимо представить комплексное число в тригонометрической форме. Имеем: $|z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$; $\cos\varphi=-1/\sqrt{2}$ и $\sin\varphi=1/\sqrt{2}$, т.е. $\varphi=3\pi/4$ (так как соответствующая точка лежит во второй четверти). Следовательно, $-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ и $(-1+i)^{13}=\sqrt{2^{13}}\left(\cos\dfrac{3\cdot 13\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\cdot 13\pi}{4}\right)$. Учитывая, что $\dfrac{39\pi}{4}=10\pi-\dfrac{\pi}{4}$ и используя свойства тригонометрических функций, получаем:

$$(-1+i)^{13}=64\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)=64\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})=64-64i.$$

В задании b) тригонометрическая форма заданного числа имеет вид $-1=\cos\pi+i\sin\pi$ ($|z|=1$), поэтому в силу (1.5)

$$z_k=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3},\ k=0,1,2.$$

Выписываем три искомых корня:

$$z_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_1=\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}=\cos\pi+i\sin\pi=-1;$$

$$z_2=\cos\frac{\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задание 2. Выполнить действия

Правила	**Образцы**	**Задания**
1. Сложение $(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=$ $=a_1+a_2+(b_1+b_2)i$ 2. Вычитание $(a_2+b_2i)-(a_1+b_1i)=$ $=a_2-a_1+(b_2-b_1)i$ 3. Умножение $(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=$ $=a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)i$ 4. Деление $\frac{a_2+b_2i}{a_1+b_1i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_1^2+b_1^2}+$ $+\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1^2+b_1^2}i$	Найти сумму z_1+z_2, разность z_2-z_1, произведение z_1z_2 и частное $\frac{z_2}{z_1}$ двух комплексных чисел Даны комплексные числа z_1= -2 + 5i и z_2 = 3 - 4i. Найти: а)z_1+z_2; б)z_2-z_1; в)z_1z_2; г) z_1/z_2. 1) сумма: $(-1+6i)+(2+5i)=$ $=-1+2+(6+5)i=1+11i$, 2) разность: $(2+5i)-(-1+6i)=$ $=2-(-1)+(5-6)i=3-i$ 3)произведение: $(-1+6i)(2+5i)=$ $=-1\cdot2-5\cdot6+(-1\cdot5+2\cdot6)i=$ $=-2-30+(-5+12)i=-32+7i$ 4) частное: $\frac{2+5i}{-1+6i}=\frac{(-1)\cdot2+6\cdot5}{(-1)^2+6^2}+\frac{(-1)\cdot5-2\cdot6}{(-1)^2+6^2}i=$ $=\frac{28}{37}-\frac{17}{37}i$	Найти сумму z_1+z_2, разность z_2-z_1, произведение z_1z_2 и частное $\frac{z_2}{z_1}$ комплексных чисел 1) $z_1=2+i;$ $z_2=2-i$ 2) $z_1=i;$ $z_2=1-2i$ 3) $z_1=3;$ $z_2=3+i$ 4) $z_1=-5i;$ $z_2=1$ 5) $z_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}i;$ $z_2=\sqrt{2}-\sqrt{3}i$

Самостоятельная работа № 9
Тема: «Основы теории вероятностей и математической статистики»
Цели: Формирование у студентов базовых математических знаний для решения задач в профессиональной деятельности, умение применять математический аппарат теории вероятностей при решении задач.
Задание 1 Составьте опорный конспект по теме, «развернуто» ответив на вопросы
1. Дайте определение понятию испытание?
2. Сформулируйте классическое определение вероятности?
3. Чему равна вероятность достоверного события?
4. Чему равна вероятность невозможного события?
5. Чему равна полная группа событий?
6. Какое событие называется сложным?
7. Какие события называются независимыми?
8. Случайная величина – это ?
9. Запишите закон распределения случайной величины.
10. Что такое дискретная и непрерывная случайные величины?
11. В чем смысл закона распределения случайной величины.
12. Что такое биномиальное распределение?
13. Как находят математическое ожидание дискретной случайной величины?
14. Что такое отклонение случайной величины?
15. Как можно найти среднее квадратичное отклонение случайной величины?

Самостоятельная работа № 10
Цели: Проверка сформированности у студентов базовых математических знаний.
Задание. Подготовиться к экзамену.
1. Устно ответив на следующие вопросы:
Экзаменационные вопросы.

1. Определение предела функции в точке и в бесконечности.
2. Основные теоремы о пределах.
3. Первый и второй замечательные пределы.
4. Производная функции. Дифференциал функции. Правила дифференцирования.
5. Таблица производных. Производная сложной функции.
6. Механический и геометрический смысл производной.
7. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.
8. Таблица неопределенных интегралов.
9. Методы интегрирования: метод непосредственного интегрирования, метод замены переменной, метод интегрирования по частям.
10. Определенный интеграл и его свойства.
11. Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.
12. Вычисление площадей плоских фигур с помощью интегралов.

13. Вычисление объемов тел вращения с помощью интегралов.
14. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
15. Дифференциальные уравнения первого порядка и методы их решения.
16. Дифференциальные уравнения второго порядка и методы их решения.
17. Элементы и множества. Задание множеств. Операции над множествами.
18. Отношения. Свойства отношений.
19. Понятие события. Достоверные, невозможные, совместные, несовместные, противоположные события. Классическое определение вероятности.
20. Теорема сложения вероятностей. Теорема умножения вероятностей.
21. Случайная величина. Дискретная и непрерывная случайные величины. Закон распределения случайной величины.
22. Математическое ожидание дискретной случайной величины. Отклонение случайной величины.
23. Дисперсия случайной величины. Среднее квадратичное отклонение случайной величины.
24. Методы вычисления интегралов.

2. Письменно решить задания к экзамену

1. Вычислить предел $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.
2. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-x^3+1}{2x^4+x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^3+2x}$.
3. Вычислить предел $\lim_{x\to4}\left(\sqrt{x}-3x\right)$.
4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{3x}$.
5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2+x}{x^2-2x}$.
6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to8}\frac{x^2-10x+16}{x-8}$.
7. Вычислить предел $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}$
8. Исследовать функцию $f(x)=\frac{5x}{x-6}$ на непрерывность в точке $x_0=6$.
9. Исследовать функцию $f(x)=3x^2-x^3$ и построить ее график.
10. Вычислить значение производной следующих функций в точке $x_0=4$:

а) $f(x)=8x^2-\ln x$; б) $f(x)=x^3+5x$.

11. Найти производную функции $y=\left(x^4-5x^2+x\right)^7$.
12. Найти производную функции $y=\frac{11x-8}{2x+4}$.
13. Найти производную функции $y=e^{2x^5-8}$.
14. Найти производную функции $y=\ln\left(8x^4-3x^2+2\right)$.

15. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{4 - x^3 + x^2 - 2x}{x} dx$.
16. Найти неопределенный интеграл методом замены переменной $\int x^2 \cdot e^{x^3} dx$.
17. Найти неопределенный интеграл методом замены переменной $\int (6x+11)^4 dx$.
18. Найти неопределенный интеграл методом замены переменной $\int \cos(6x-1)dx$.
19. Найти неопределенный интеграл методом замены переменной $\int \sin^6 x \cdot \cos x dx$.
20. Вычислить определенный интеграл $\int_0^3 (5x+1)dx$.
21. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 (x-5)x dx$.
22. Вычислить определенный интеграл $\int_0^2 \frac{2x^3 + x^4}{x^2} dx$.
23. Скорость движения точки изменяется по закону $v = 5t^2 + 4t + 2$ (м/с). Найти путь s, пройденный точкой за 4 с от начала движения.
24. Вычислить объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$, вокруг оси *Ox*.
25. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.
26. Решить дифференциальное уравнение $y'' - 9y' + 20y = 0$.
27. Решить уравнение $A_7^2 = 42x$
28. Вычислить $C_3^3 \cdot P_3$
29. Вычислить $\frac{32!}{33!}$
30. Вычислить A_{10}^4
31. Тело движется прямолинейно со скоростью $v = 0{,}1t^3$ м/с. Вычислить путь, пройденный телом за 10 сек.
32. Решить уравнение $A_5^2 = 20x$
33. Решить дифференциальное уравнение $y' = 11x$.
34. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x^2$; $x=1$ и $x=2$
35. Скорость движения точки изменяется по закону $\upsilon = 3t^2 + 2t + 1$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения
36. В одной корзине находятся 5 белых и 10 черных шаров, в другой – 4 белых и 11 черных. Из каждой корзины вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся черными.
37. В лотерее 1000 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 200 рублей и десять выигрышей по 100 рублей. Пусть X – величина возможного выигрыша для человека, имеющего один билет. Составить закон распределения этой случайной величины X.
38. Случайная величина X задана законом распределения:

4	6	7
0,4	0,5	0,1

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение этой случайной величины *X*.

Критерии оценки внеаудиторной (самостоятельной) работы

Процент результативности	Балл (оценка)	Критерии оценивания
90-100%	5	— глубокое изучение учебного материала, литературы и нормативных актов по вопросу; — правильность формулировок, точность определения понятий; — последовательность изложения материала; — обоснованность и аргументированность выводов; — правильность ответов на дополнительные вопросы; — своевременность выполнения задания.
70-89%	4	— полнота и правильность изложения материала; — незначительные нарушения последовательности изложения; — неточности в определении понятий; — обоснованность выводов приводимыми примерами; — правильность ответов на дополнительные вопросы; — своевременность выполнения задания.
50-69%	3	— знание и понимание основных положений учебного материала; — наличие ошибок при изложении материала; — непоследовательность изложения материала; — наличие ошибок в определении понятий, неискажающих их смысл; — несвоевременность выполнения задания.
0-49%	2	— незнание, невыполнение или неправильное выполнение большей части учебного материала; — ошибки в формулировке определений, искажающие их смысл; — беспорядочное и неуверенное изложение материала; — отсутствие ответов на дополнительные вопросы; — отсутствие выводов и неспособность их сформулировать; — невыполнение задания.