Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Комарова Светлана Юриевна
Должность: Проректор по образовательной деятельности
Дата подписания: 05.09.2023 05:22:01
Уникальный программный ключ:
43ba42f5deae4116bbfcbb9ac98e39108031227e81add207cbee4149f2098d7a

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.А. СТОЛЫПИНА»
(ФГБОУ ВО Омский ГАУ)

Университетский колледж агробизнеса

Методические рекомендации для выполнения практических работ по дисциплине ЕН. 01 Математика для обучающихся по специальности

36.02.01 Ветеринария

г. Омск

Пояснительная записка

Данные методические указания являются приложением по теме «Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений», содержат индивидуальные задания по линейной алгебре и предназначены для студентов 1 курса.

Каждый раздел начинается с кратких теоретических сведений по теме: приводятся основные определения, формулы и теоремы (без доказательств). Затем разбираются практические упражнения, подобные данным в индивидуальных заданиях для студентов, но не совпадающие с ними. Таким образом, изучение данных примеров способствует формированию навыков работы с элементами линейной алгебры, но не приводит к исключительно репродуктивной деятельности студентов.

Разработка не содержит подробного изложения темы «Исследования систем линейных уравнений», так как в соответствующем издании с индивидуальными заданиями практические упражнения на указанную тему отсутствуют. Читатель может ознакомиться с интересуемыми вопросами исследования систем линейных уравнений в любом источнике, указанном в списке литературы.

Практические задания разработаны в соответствии с учебной программой. В зависимости от содержания они могут выполняться студентами индивидуально или фронтально.

Оглавление

1. Матрицы и определители

1.1 Понятие матрицы

Матрицей размера $m \times n$, где m – число строк, n – число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Сами числа называются **элементами матрицы**.

Матрицы обозначаются большими латинскими буквами: A, B, C, … . Элементы матрицы обозначаются символом a_{ij}, где i – номер строки, а j – номер столбца, на пересечении которых находится элемент:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если число строк матрицы равно числу столбцов и равно n, то матрица называется **квадратной порядка *n***.

Если число строк матрицы не равно числу столбцов, то матрица называются **прямоугольной.**

В зависимости от значений элементов, выделяют следующие матрицы:

1) **Нулевая** матрица – матрица, все элементы которой равны 0:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2) **Единичной** – квадратная матрица, у которой элементы главной диагонали равны 1, а остальные элементы равны 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2 Операции над матрицами

К алгебраическим операциям над матрицами относятся:
– сложение (вычитание),
– умножение на число,
– умножение матрицу на матрицу.

Суммой (разностью) двух матриц A и B размера $m \times n$ называется матрица C размера $m \times n$, элементы которой определяются равенствами:

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \; (c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}),}$$
где $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1,2, \ldots, n$.

Таким образом, операции сложения (вычитания) матриц определена только в случае, если матрицы имеют одинаковый размер.

Пример 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы A на число λ называется матрица C, у которой каждый элемент равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число λ, т.е.:

$$\boxed{c_{ij} = \lambda a_{ij}}$$

Пример 2

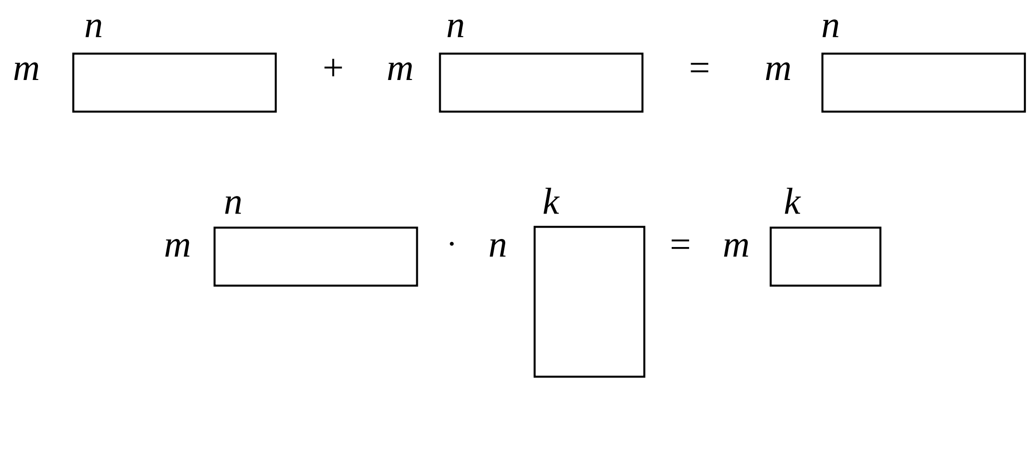
$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times k$ называется матрица C размера $m \times k$, у которой элемент, стоящий на пересечении i-той строки и j-того столбца равен сумме произведений элементов i-той строки первого сомножителя на элементы j-того столбца второго сомножителя, т.е.:

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot b_{sj}}$$

Таким образом, операция умножения двух матриц определена, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Обзор операций над матрицами может быть представлен следующей схемой:



Замечание 1. Операция умножения матриц не коммутативна:
$A \cdot B \neq B \cdot A$.

Замечание 2. Если определены произведения $A \cdot E$ и $E \cdot A$, то имеют место равенства:
$A \cdot E = A$, $E \cdot A = A$

Пример 3

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}3 & -1 & -6\end{pmatrix}$.

Для каких матриц определены операции сложения и умножения?

Решение

Матрица A имеет размер 2x3, матрица B имеет размер 2x3, матрица C имеет размер 3x2, матрица D имеет размер 3x1, матрица F имеет размер 1x3.

$A+B$ может быть найдена, так как матрицы A и B имеют одинаковый размер:

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -5 & 5\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Среди матриц, данных выше, нет других, имеющих одинаковый размер, поэтому операция сложения определена только для A и B.

$A\cdot B$ и $B\cdot A$ нельзя найти (размерности матриц 2x3 и 2x3).

$A\cdot C$ можно найти (размерности матриц 2x$\underline{3}$ и $\underline{3}$x2), полученная матрица будет иметь размер 2x2:

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 5+(-2)\cdot 2+3\cdot(-1) & 1\cdot 3+(-2)\cdot 0+3\cdot 1\\ 0\cdot 5+1\cdot 2+4\cdot(-1) & 0\cdot 3+1\cdot 0+4\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

$C\cdot A$ можно найти (размерности матриц 3x$\underline{2}$ и $\underline{2}$x3), полученная матрица будет иметь размер 3x3:

$$C\cdot A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5\cdot 1+3\cdot 0 & 5\cdot(-2)+3\cdot 1 & 5\cdot 3+3\cdot 4\\ 2\cdot 1+0\cdot 0 & 2\cdot(-2)+0\cdot 1 & 2\cdot 3+0\cdot 4\\ -1\cdot 1+1\cdot 0 & -1\cdot(-2)+1\cdot 1 & -1\cdot 3+1\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -7 & 27\\ 2 & -4 & 6\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

$A\cdot D$ можно найти (размерности матриц 2x$\underline{3}$ и $\underline{3}$x1), полученная матрица будет иметь размер 2x1:

$$A\cdot D=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+6+12 & 0-3+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & 13\end{pmatrix}.$$

$D\cdot A$ нельзя найти (размерности матриц 3x1 и 2x3).

$A\cdot F$ нельзя найти (размерности матриц 2x3 и 1x3).

$F\cdot A$ нельзя найти (размерности матриц 1x3 и 2x3).

$B\cdot C$ можно найти (размерности матриц 2x$\underline{3}$ и $\underline{3}$x2),

полученная матрица будет иметь размер 2x2:

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15-6-2 & 9-0+2\\ 5-2+2 & 3-0-2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7 & 11\\ 5 & 1\end{pmatrix}.$$

$C\cdot B$ можно найти (размерности матриц 3x$\underline{2}$ и $\underline{2}$x3), полученная матрица будет иметь размер 3x3:

$$C\cdot B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}15+3 & -15-3 & 10-6\\ 6+0 & -6+0 & 4-0\\ -3+1 & 3-1 & -2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & -18 & 4\\ 6 & -6 & 4\\ -2 & 2 & -4\end{pmatrix}.$$

$B\cdot D$ можно найти (размер матриц 2x$\underline{3}$ и $\underline{3}$x1), полученная матрица будет иметь размер 2x1:

$$B\cdot D=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+9+8 & 2+3-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23 & -3\end{pmatrix}.$$

$D\cdot B$ нельзя найти (размер матриц 3x1 и 2x3).

$B\cdot F$ нельзя найти (размер матриц 2x3 и 1x3).

$F\cdot B$ нельзя найти (размер матриц 1x3 и 2x3).

$C\cdot D$ нельзя найти (размер матриц 3x2 и 3x1).

$D\cdot C$ нельзя найти (размерности матриц 3x1 и 3x2).

$C\cdot F$ нельзя найти (размер матриц 3x2 и 1x3).

$F{\cdot}C$ можно найти (размер матриц 1х<u>3</u> и <u>3</u>х2), полученная матрица будет иметь размер 1х2:

$$F \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 5 + (-1)\cdot 2 + (-6)\cdot(-1) & 3\cdot 3 + (-1)\cdot 0 + (-6)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

$D{\cdot}F$ можно найти (размер матриц 3х<u>1</u> и <u>1</u>х3), полученная матрица будет иметь размер 3х3:

$$D{\cdot}F = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -12 \\ -9 & 3 & 18 \\ 12 & -4 & -24 \end{pmatrix}.$$

$F{\cdot}D$ можно найти (размер матриц 1х3 и 3х1), полученная матрица будет иметь размер 1х1:

$$F{\cdot}D{\cdot} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 3 - 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим еще одно важное понятие.

Матрица B наз. **транспонированной** к A и обозначается $B = A^t$, если строки матрицы B являются столбцами матрицы A с теми же номерами (а столбцы B – строками A).

<u>Пример 4</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -6 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Лемма

Для любых матриц A и B, для которых определено произведение $A{\cdot}B$, верно равенство $(A{\cdot}B)^t = B^t{\cdot}A^t$.

1.3 Определители 2-го и 3-го порядков

С квадратной матрицей A связано особое число, называемое ее определителем и обозначаемое $\det(A)$, $|A|$ или Δ.

Четкое определение этого понятия требует подробного изучения нескольких понятий: подстановки и инверсии, поэтому ограничимся лишь описанием способов вычисления определителей матриц 2-го и 3-го порядков, а позже и определителей любого порядка.

Определителем 2-го порядка называется число, вычисляемое по формуле:

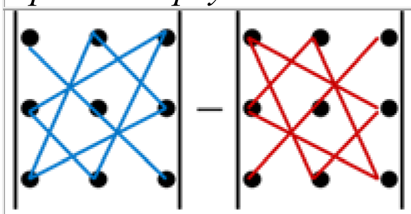
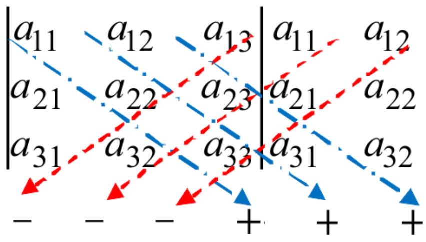
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

то есть определитель 2-го порядка равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали минус произведение элементов, стоящих ан побочной диагонали.

Определителем 3-го порядка называется число, вычисляемое по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Конечно, указанная формула сложна для запоминания, поэтому для вычисления определителей можно воспользоваться одним из правил:

Правило треугольника	*Правило Саррюса*
 Точки – вершины треугольников– демонстрируют множители в произведениях	
$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$.	

<u>Пример 5</u>

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - (-2) \cdot 3 = 4 + 6 = 10.$$

<u>Пример 6</u>

Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

<u>Решение</u>

$\Delta = -2 \cdot 2 \cdot 3 + 6 \cdot (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 6 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = -3$.

1.4. Свойства определителей

Свойство 1

Величина определителя не меняется при транспонировании:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Из свойства 1 следует, что строки и столбцы определителя равноправны, поэтому все остальные свойства будут сформулированы для строк, но они будут справедливы и для столбцов.

Свойство 2

Определитель, содержащий строку из одних нулей, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Процедура, при которой меняются местами две любые строки (два любых столбца) определителя называется **транспозицией**.

Свойство 3

Транспозиция меняет знак определителя на противоположный:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{in} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойство 4

Если все элементы какой-либо строки определителя умножить на любое число k, то величина определителя изменится в k раз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Свойство 5

Если каждый элемент некоторой строки определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей: в 1ом в строке с тем же номером стоят первые слагаемые, а во 2ом – вторые:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1}+c_{i1} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Свойство 6

Величина определителя не изменится, если к некоторой строке прибавить другую строку, умноженную на любое число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1}+ka_{in} & a_{j2}+ka_{i2} & \dots & a_{jn}+ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойство 7

Определитель, имеющий две равные строки, равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{in} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

<u>Пример 7</u>

Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -100 & 200 & -100 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение

По свойству 4 имеем:

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -100 & 200 & -100 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=100\cdot\begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-100\cdot(-3)=300.$$

(См. пример 6)

1.5. Миноры и алгебраические дополнения

Минором некоторого элемента определителя называется определитель, получаемый из данного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

Коль скоро выбран способ разложения определителя **по первой строке**, очевидно, что всё вращается вокруг неё: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Элементы обычно рассматривают слева направо (или сверху вниз, если был бы выбран столбец)

1) Из матрицы знаков выписываем соответствующий знак: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=+$

2) Затем записываем сам элемент: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=+1$

3) МЫСЛЕННО вычеркиваем строку и столбец, в котором стоит первый элемент: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=+1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ Оставшиеся четыре числа и образуют определитель «два на два», который называется **МИНОРОМ** данного элемента (единицы).

Переходим ко второму элементу строки.

4) Из матрицы знаков выписываем соответствующий знак:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} -$$

5) Затем записываем второй элемент:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} -(-2)$$

6) МЫСЛЕННО вычеркиваем строку и столбец, в котором стоит второй элемент:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} -(-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix}$$

Оставшиеся четыре числа записываем в маленький определитель.

Ну и третий элемент первой строки. Никакой оригинальности:

7) Из матрицы знаков выписываем соответствующий знак:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} -(-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} +$$

8) Записываем третий элемент:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} -(-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} +3$$

9) МЫСЛЕННО вычеркиваем строку и столбец, в котором стоит третий элемент:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} -(-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} +3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -7 & 8 \end{vmatrix}$$

Оставшиеся четыре числа записываем в маленький определитель.

Аналогично определитель можно разложить по любой строке или по любому столбцу.

Пример 8

Найти миноры элементов a_{13} и a_{22} определителя $\begin{vmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение

Минор элемента $a_{13} = -2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 28 = -23$$

Минор элемента $a_{22} = 4$:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-14) = 17$$

Алгебраическим дополнением некоторого элемента определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$, где i – номер строки, а j – номер столбца, на пересечении которых находится элемент.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначается A_{ij}.

Пример 9

Найти алгебраические дополнения элементов a_{13} и a_{22} определителя

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-23) = -23$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 17 = 17.$$

Теорема

Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

Пример 10

Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение

Разложим определитель по первой строке:

$$\Delta = -2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (6+1) - 6 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) = 3.$$

Замечание 3: На практике для вычисления определителей удобно сначала “упростить” определитель с помощью свойств, а затем применять теорему о разложении определителя по строке или столбцу.

Пример 11

Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение

1 способ

Вычтем из первой строки вторую, умноженную на 2, получим

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2-2\cdot(-1) & 6-2\cdot 2 & 1-2\cdot 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Теперь разложим определитель по 1$^{\text{му}}$ столбцу:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + ... + a_{31}A_{31} = 0 + (-1)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 = 3.$$

2 способ

Вычтем из третьего столбца второй, умноженный на 3, получим

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2 & 6 & 1-3\cdot 6 \\ -1 & 2 & -1-3\cdot 2 \\ 0 & 1 & 3-3\cdot 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 6 & -17 \\ -1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Теперь разложим определитель по 3$^{\text{ей}}$ строке:

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + ... + a_{33}A_{33} = \ = 0 + 1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & -17 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} + 0 = -1\cdot(14-17) = 3$$

Пример 12 *(аналогичен заданию 7 модуля)*

Вычислить определитель четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение

Так как в данном определителе элемент $a_{41} = 0$, то целесообразно попытаться получить 0 в первом столбце или в четвертой строке. Все необходимые преобразования будем подписывать над знаком равенства, обозначив символом a_i строку матрицы.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{a_1+2a_3,\\ a_2+4a_3}}{=} \begin{vmatrix} 2+2\cdot(-1) & -1+2\cdot 2 & 1+2\cdot(-3) & 2+2\cdot(-2) \\ 4+4\cdot(-1) & -4+4\cdot 2 & 3+4\cdot(-3) & 1+4\cdot(-2) \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 4 & -9 & -7 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0+0+(-1)\cdot(-1)^{3+2}\cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & -9 & -7 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & -9 & -7 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{a_3-a_1}{=} \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & -9 & -7 \\ 3-3 & -4-(-5) & -2-(-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & -9 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{3+2}\cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 13$$

1.6 Обратная матрица

Пусть A − квадратная матрица, тогда квадратная матрица, обозначаемая символом A^{-1} и удовлетворяющая условиям:

$A \cdot A^{-1} = E, \quad A^{-1} \cdot A = E,$

называется матрицей, **обратной** матрицы A.

Квадратная матрица, определитель которой равен 0 (не равен 0), называется **вырожденной** (**невырожденной**).

Замечание 4. Вырожденная матрица не обратима (т.е. не имеет обратной). Невырожденная матрица обратима.

Алгоритм нахождения обратной матрицы A^{-1}

1. Вычислить определитель $|A|$. Если $|A| \neq 0$, то матрица A имеет обратную. Если $|A| = 0$, то матрица A не имеет обратной.

2. Найти алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A.

3. Заменить все элементы матрицы A на их алгебраические дополнения и транспонировать полученную матрицу (то есть поменять местами строки и столбцы).

4. Разделить все элементы полученной матрицы на определитель матрицы A.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

Замечание 5. Можно показать, что, для невырожденной матрицы второго порядка $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & \mathrm{d} \end{pmatrix}$ обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \mathrm{d} & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Замечание 6. Далее будет отмечен другой способ нахождения обратной матрицы.

Пример 13

Найти матрицу, обратную матрице A, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1. Вычислим $|A|$.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-9\neq 0 \Rightarrow$$ матрица A имеет обратную.

2. Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A.

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1,\quad A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-4,\quad A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=2,$$

$$A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-5,\quad A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=7,\quad A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-1,\quad A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-4.$$

3. Заменим все элементы матрицы A на их алгебраические дополнения и транспонируем полученную матрицу, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. Разделим все элементы полученной матрицы на $|A|=-9$, получим A^{-1}:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-7}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Проверим, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-7}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-1}{9} + \frac{10}{9} + 0 & \frac{4}{9} + \frac{-4}{9} + 0 & \frac{-2}{9} + \frac{2}{9} + 0 \\ \frac{-3}{9} + \frac{10}{9} + \frac{-7}{9} & \frac{12}{9} + \frac{-4}{9} + \frac{1}{9} & \frac{-6}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} \\ \frac{-1}{9} + \frac{15}{9} + \frac{-14}{9} & \frac{4}{9} + \frac{-6}{9} + \frac{2}{9} & \frac{-2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{8}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично можно показать, что $A^{-1} \cdot A = E$.

Пример 14 (*аналогичен заданию 8 модуля*)

Найти матрицу X из матричного уравнения $X \cdot A + X + C = 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

Выразим матрицу X из данного матричного уравнения

$$X \cdot A + X + C = 3B$$

$$X \cdot A + X = 3B - C$$

$$X \cdot A + X \cdot E = 3B - C$$

$$X \cdot (A + E) = 3B - C$$

$$X \cdot (A + E) \cdot (A + E)^{-1} = (3B - C) \cdot (A + E)^{-1}$$

$$X \cdot E = (3B - C) \cdot (A + E)^{-1}$$

$$X = (3B - C) \cdot (A + E)^{-1}$$

$$3B - C = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A + E = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A + E| = \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot 1 - 7 \cdot 1 = 2 \neq 0$$

$$(A+E)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -7\\ -1 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-7}{2}\\ \frac{-1}{2} & \frac{9}{2}\end{pmatrix}$$ (см. замечание 6)

$$X=(3B-C)\cdot(A+E)^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-7}{2}\\ \frac{-1}{2} & \frac{9}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

Итак, искомая матрица $X=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

1.7 Элементарные преобразования матрицы

Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие преобразования:

1) транспозиция строк (т.е. процедура, при которой меняют местами две любые строки матрицы);

2) умножение какой-либо строки матрицы на отличное от нуля число;

3) прибавление к какой-либо строки матрицы любой другой, умноженной на любое число;

4) вычеркивание строки, состоящей из одних нулей.

Если матрица *B* получается из *A* в результате элементарных преобразований, то говорят, что *A* **эквивалентна** *B* и пишут *A* ~ *B*.

Ступенчатой называется матрица, которая удовлетворяет условиям:

1) если i-тая строка нулевая (то есть состоит из одних нулей), то $(i+1)$ строка также нулевая,

2) если первые ненулевые элементы i-той и $(i+1)$-й строк располагаются в столбцах с номерами k и l соответственно, то $k<l$.

Пример 15

Матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 0 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 5 & -8\\ 0 & 0 & -2 & 7\end{pmatrix}$ − ступенчатые.

Теорема

Всякую матрицу можно с помощью элементарных преобразований привести к ступенчатому виду.

Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn}\end{pmatrix}$.

Привести ее к ступенчатому виду можно следующим образом: к i-той строке матрицы (i = 2, 3, 4, …, k) прибавим первую строку, умноженную на $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, тем самым получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \dots & a'_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{k2} & a'_{k3} & \dots & a'_{kn} \end{pmatrix},$$

в этой матрице к i-той строке (i = 3, 4, …, k) прибавим вторую строку, умноженную на $-\frac{a'_{i2}}{a'_{22}}$, тем самым получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a''_{k3} & \dots & a''_{kn} \end{pmatrix},$$

затем к i-той строке (i = 4, …, n) прибавим третью строку, умноженную на $-\frac{a''_{i3}}{a''_{33}}$, продолжая этот процесс, приходим к ступенчатой матрице.

Пример 16

Привести матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ к ступенчатому виду

Решение

Прибавим ко второй строке матрицы первую, умноженную на $-\frac{3}{2}$, получим:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 11/2 & 1/2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

К третьей строке прибавим первую, умноженную на -2, получим:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 11/2 & 1/2 \\ 0 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к третьей строке матрицы вторую, умноженную на $-\frac{8}{11/2} = -\frac{16}{11}$, получим

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 11/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -41/11 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица является ступенчатой.

1.8 Вычисление обратной матрицы элементарными преобразованиями

Пусть дана невырожденная матрица n порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Составим из матрицы A новую матрицу, приписав справа к матрице A единичную:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью элементарных преобразований добьемся того, чтобы слева получилась единичная матрица, тогда справа будет матрица, обратная данной.

<u>Пример 17</u>

Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Решение</u>

Припишем справа к матрице A единичную

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сначала приведем эту матрицу к ступенчатому виду. Все необходимые преобразования будем подписывать над знаком эквивалентности, обозначив символом a_i строку матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{a_2+(-3)\cdot a_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{a_3+(-1)\cdot a_1}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{a_2 \leftrightarrow a_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{a_3+4\cdot a_2}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -7 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Итак, матрица приведена к ступенчатому виду.

Добьемся того, чтобы матрица слева была единичной.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & -7 & 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{a_3:9}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-7}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \overset{a_2+(-2)\cdot a_3}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-7}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \overset{a_1+(-2)\cdot a_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-7}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-7}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$.

2. Системы линейных уравнений

2.1 Общие сведения о системах линейных уравнений

Рассмотрим систему *n* линейных уравнений с *n* неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Числа a_{ij} $(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ называются **коэффициентами** системы, а числа b_j называются **свободными членами.**

Решением системы называется совокупность чисел x_1, x_2, …, x_n, при подстановке которых в систему получаем верные равенства.

Система, имеющая решение, называется **совместной**.

Система, не имеющая решение, называется **несовместной**.

Если все свободные члены равны 0, то система называется **однородной**, в противном случае – **неоднородной**.

Замечание 7. Однородная система линейных уравнений всегда совместна. Она обязательно имеет нулевое решение (возможно не единственное)

2.2 Матричная запись системы линейных уравнений

Введем следующие обозначения:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix},$$

тогда систему (I) можно записать в следующей матричной форме:

$$A \cdot X = B.$$

Пусть $|A| \neq 0$, тогда существует A^{-1}.

Умножим обе части уравнения на A^{-1} слева:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1}B$$

$$E \cdot X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Пример 18

Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Решение

Запишем систему в виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$,

то есть в виде $A \cdot X = B$,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$,

тогда $X = A^{-1}B$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-7}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \cdot \text{(см. примеры 13, 17)}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-7}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Итак, $x_1 = 2$, $x_2 = -4$, $x_3 = 5$.

2.3 Формулы Крамера

Выше было показано, что решение системы (I), в случае если $|A| \neq 0$, можно находить в виде $X = A^{-1}B$. Преобразуем полученное выражение:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} b_1 + \frac{A_{21}}{|A|} b_2 + \ldots + \frac{A_{n1}}{|A|} b_n \\ \frac{A_{12}}{|A|} b_1 + \frac{A_{22}}{|A|} b_2 + \ldots + \frac{A_{n2}}{|A|} b_n \\ \ldots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} b_1 + \frac{A_{2n}}{|A|} b_2 + \ldots + \frac{A_{nn}}{|A|} b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n \\ \ldots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{pmatrix},$$

откуда $x_i = \frac{1}{|A|}\cdot(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + ... + A_{ni}b_n) = \frac{\Delta_i}{\Delta}$,

где $\Delta = |A|$ − определитель матрицы A, $\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}...a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}...a_{1n} \\ a_{21}...a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}...a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1}...a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}...a_{nn} \end{vmatrix}$ − определитель, получаемый из определителя Δ заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

Таким образом, получили:

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}}$$

где i =1, 2, … n.

Полученные формулы называются **формулами Крамера**.

Пример 19

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение

$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ – формулы Крамера, где i =1, 2, 3.

$\Delta = -9$ (см. примеры 13)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -18, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 36, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -45;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -4, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5.$$

2.4 Метод Гаусса (метод исключения неизвестных)

Рассмотрим систему k линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Запишем матрицу этой системы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Матрица, получаемая из матрицы A в результате приписывания справа столбца свободных членов, называется **расширенной** матрицей системы и обозначается $\overline{A}$:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix}.$$

Сущность метода Гаусса заключается в последовательном исключении из всех уравнений системы, начиная со второго, переменной x_1, затем исключении переменной x_2 из всех уравнений системы, начиная с третьего и т.д.

Другими словами, приводят расширенную матрицу системы к ступенчатому виду.

Если число уравнений системы равно числу неизвестных и равно n, то, приходят к системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'''_{nn}x_n = b'''_n. \end{cases}.$$

Из полученной системы легко последовательно найти переменные $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1$.

<u>Пример 20</u>

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

<u>Решение</u>

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & 1 & 21 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & 1 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6, \\ x_2 + 2x_3 = 6, \\ 9x_3 = 45. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} x_1 = -6 - 2x_2, \\ x_2 = 6 - 2x_3, \\ x_3 = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -4, \\ x_3 = 5. \end{cases}$$

Практическая работа №1

Тема: Матрицы и действия с ними. Определитель матрицы.

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с матрицами, находить определители матриц.

Теоретические сведения к практической работе

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Запись « матрица B имеет размер mхn» означает, что речь идет о матрице, состоящей из m строк и n столбцов. Например, матрица $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет размер 2х3. Далее, b_{ij} - обозначение элемента, стоящего на пересечении i-й строки и j-го столбца данной матрицы (в примере $b_{23}=5$).

При ссылке на i-*ю* строку матрицы A используют обозначение A_i, при ссылке на j-*й* столбец – обозначение A^j.

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Элементы a_{11} , a_{22} ,…, a_{nn} квадратной матрицы A (размера nхn) образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется *диагональной.* Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется *единичной.* Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется *верхней (нижней) треугольной матрицей*. Например, среди квадратных матриц размера 3х3

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & -4 & -2\end{pmatrix}$$

матрица *A* является верхней треугольной, *B* – диагональной, *C* – нижней треугольной, *E* – единичной.

Матрицы *A, B* называются *равными* (*A*=*B*), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

Арифметические действия с матрицами.

Чтобы *умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k,* необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$kA=k\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn}\end{pmatrix}.$$

Чтобы найти *сумму матриц A, B* одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}.$$

Пример 1. Найти *2A-B*, если $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}$.

Решение. Сначала умножаем матрицу *A* на число «2», затем матрицу *B* на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A-B=2\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 7 & 4\end{pmatrix}$$

Имеем: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$

$= 2(-1\cdot 0 - 2\cdot 5) + 3(4\cdot 0 - 2\cdot 3) - 1(4\cdot 5 - (-1)\cdot 3) = -20 - 18 - 23 = -61.$

Произведение AB можно определить только для матриц A размера mхn и B размера nхp, при этом $AB=C$, матрица C имеет размер mхp, и ее элемент c_{ij} находится как скалярное произведение *i-й* строки матрицы A на *j-й* столбец матрицы B: $c_{ij} = A_i B^j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$ $(i=1,2,\ldots,m;\ \ j=1,2,\ldots,p)$. Фактически необходимо каждую строку матрицы A (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы B (стоящей справа).

Пример 2. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Размер матрицы A 3х2, матрицы B 2х2. Поэтому произведение AB найти можно, произведение BA – нет. Действуя по сформулированному выше правилу, получаем:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1;1)(1,3) & (-1;1)(-2;4) \\ (0;4)(1;3) & (0,4)(-2;4) \\ (2;1)(1;3) & (2;1)(-2;4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & 2+4 \\ 0+12 & 0+16 \\ 2+3 & -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицей, *транспонированной* к матрице A размера mхn, называется матрица A^T размера nхm, строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Например, если $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, то $C^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T$.

Решение. Воспользовавшись вычислениями, проведенными при решении примера, а также правилами умножения матрицы на число и сложения матриц, получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ 20 & 30 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матрицы А, В называются *эквивалентными*, если одна получена из другой путем элементарных преобразований.

Рангом матрицы *A* в дальнейшем будем считать число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, используя обозначение *r(A).* Так, в рассмотренном выше примере 3.4 *r(A)=3, r(B)=2.* Можно доказать, что ранг матрицы *A* (размера *m*x*n*) не может быть больше $\min\{m,n\}$ (например, для матрицы *A* размера *2*x*3* $r(A) \le 2$). Кроме того, ранг матрицы не зависит ни от выбора ведущих элементов, ни от проводимых преобразований. Это свойство можно использовать при проверке. Так, в примере 3.4 после перестановки первой и второй строки в матрице *B* можно в качестве ведущего сначала рассмотреть элемент b_{12}, а затем вычеркнуть третью строку, пропорциональную второй ($C_3 = -C_2$):

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{C_3 = C_3 - 3C_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ -2 & 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Вычисление определителей. Определитель матрицы *A* размера *2*x*2* (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы *A* размера *3*x*3* (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример 4. Найти: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Решение. При нахождении определителя воспользуемся сначала формулой $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, а затем (для вычисления определителей 2-го порядка) формулой $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Содержание практической работы

Задание 1. Выполнить арифметические действия с матрицами:

1) $3\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & -4\\ 5 & 0\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}^T+2\begin{pmatrix}5 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ -8 & 10 & 4\end{pmatrix}^T-3\begin{pmatrix}-5 & -1\\ 8 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 8\\ 3 & 8 & 5\\ 0 & -4 & 7\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2 & 10 & 3\\ 0 & 4 & -2\\ 5 & 2 & -9\end{pmatrix}^T$;

5) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 14\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & -3 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 10\\ 2 & 4 & 8 & -1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}3\\ -2\\ -3\\ 1\end{pmatrix}^T$;

7) $\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 5 & 6 & -2\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}-5 & 6\\ 2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

Задание 2. Доказать равенство *(AB)C=A(BC)* для матриц:

1) $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 5\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$;

4) $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}4 & 8 & -4\\ -8 & 0 & 1\end{pmatrix}$

5) $A=\begin{pmatrix}4 & 8 & 3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\\ 0 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 8\end{pmatrix}.$

Задание 3. Найти: 1) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}^2$; 2) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^3$; 3) $\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}^3$.

Задание 4. Найти сумму, разность, произведения двух матриц А и В.

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & -3\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

г) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ -2 & 0 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2\\ 0 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\\ 0 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$;

е) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & -5\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5 & 5 & -10\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$;

ж) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 0 & -4\\ -8 & 0\end{pmatrix}$;

з) $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -8 & 3\end{pmatrix}$;

и) $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\frac{3}{14} & \frac{5}{14} & -\frac{1}{7}\\ -\frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{5}{7}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$.

Задание 5. Доказать, что матрицы А и В коммутирующие.

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 6 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -8\\ 8 & -4\end{pmatrix}$.

Задание 6. Вычислить $(3A - 2B)\cdot C$, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & -8\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ -8 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Задание 7. Найти A^3, если

а) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Задание 8. Найти матрицу X, если 3A+2X=B, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Задание 9. Найти ABC, если

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 8\end{pmatrix}$.

Определители

Задание 1. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$;

10) $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$; 11) $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; 13) $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$; 14) $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$

Задание 2. С помощью правила треугольников вычислить определители

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \\ -8 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Задание 3. Вычислить определители, предварительно упростив их:

а) $\begin{vmatrix} 11040 & 11041 & 11041 \\ 11040 & 11041 & 11043 \\ 11041 & 11042 & 11043 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2-1 & x^2-1 & x^2-1 \\ x^3-1 & x^3-2 & x^3-3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & x^3+3 & x-1 \\ 3 & x^3+3 & x-2 \\ 3 & x^3+3 & x-3 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 8 & 7 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3; & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ е) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 4 & 8 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Задание 4. Вычислить определитель методом приведения его к треугольному виду

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Задание 5. Пусть даны матрицы A и B. Доказать, что $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица

1. Найти обратную матрицу:

а) $A = (8)$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; ж) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; з) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$;

и) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; к) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; л) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

м) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; н) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$.

2. Найти обратную матрицу и проверить выполнение условия $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Доказать равенство $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Доказать равенство $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответы по теме «Обратная матрица»

1. а) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{8}\end{pmatrix}$; б) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; в) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$; г) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{10}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$;

д) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}$; е) $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}$; ж) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

з) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$; и) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{14}{25} & -\frac{11}{25} & -\frac{2}{25}\\ \frac{1}{25} & \frac{1}{25} & \frac{7}{25}\\ \frac{3}{25} & \frac{3}{25} & -\frac{4}{25}\end{pmatrix}$;

к) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{7}{15}\\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5}\end{pmatrix}$; л) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{12}\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12}\end{pmatrix}$;

м) $|A|=0$; н) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{x^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{x^2}\end{pmatrix}$.

2. а) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{10} & -\frac{1}{10}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$; б) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10}\\ -\frac{1}{20} & \frac{3}{20} & -\frac{1}{20}\\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$.

2. а) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & -4\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$, $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}6 & -\frac{7}{2}\\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$;

б) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{12}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{10} & 0 & -\frac{1}{10}\\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10}\\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} & -\frac{6}{5}\end{pmatrix}$,

$$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{23}{160} & -\frac{1}{160} & \frac{1}{120}\\ \frac{1}{160} & -\frac{7}{160} & \frac{7}{120}\\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{7}{30}\end{pmatrix}.$$

5. а) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{8}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $(A^{-1})^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$,

$A^T=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $(A^T)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$;

б) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -7 & 8\end{pmatrix}$, $(A^{-1})^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & 0 & 0\\ -\frac{2}{3} & 1 & -7\\ \frac{2}{3} & -1 & 8\end{pmatrix}$,

$A^T=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 4 & 8 & 7\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $(A^T)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & 0 & 0\\ -\frac{2}{3} & 1 & -7\\ \frac{2}{3} & -1 & 8\end{pmatrix}$.

Индивидуальные задания

1. Вычислить определитель разложением

а) по i- той строке;

б) по j- тому столбцу.

1.1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; i=2, j=3.

1.2. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$; i=4, j=1.

1.3. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; i=3, j=2.

1.4. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$; i=3, j=3.

1.5. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -3 & 7 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; i=1, j=4.

1.6. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \\ -6 & 1 & 0 & 4 \\ 8 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; i=2, j=2.

1.7. $\begin{vmatrix} -3 & -6 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; i=4, j=4.

1.8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 8 \\ 0 & -4 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}$; i=2, j=2.

1.9. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$; i=3, j=2.

1.10. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$; i=2, j=1.

1.11. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & 6 & 6 & 2 \\ 4 & 11 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; i=1, j=2.

1.12. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; i=3, j=2.

1.13.; $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 1.14. $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ ;2 & 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}$ 1.15. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

i=2, j=3. i=1, j=3. i=4, j=2.

1.16. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 & 8 \\ -1 & 0 & -6 & 4 \\ 8 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ 1.17. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 1.18. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

i=2, j=3. i=2, j=4. i=1, j=3.

1.19. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -6 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 1.20. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ ;-2 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ 1.21. $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 8 \end{vmatrix}$

i=2, j=2. i=1, j=4. i=3, j=2.

1.22. $\begin{vmatrix} 8 & 6 & 6 & 2 \\ 4 & 11 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ 1.23. $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ 1.24. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & -2 \\ 2 & 4 & 8 & -3 \end{vmatrix}$

i=1, j=3. i=2, j=1. i=3, j=4.

1.25. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ 1.26. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ 1.27. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

i=4, j=3. i=3, j=3. i=1, j=2.

Практическая работа №2

Тема: Системы линейных алгебраических уравнений и методы их решения.

Цель: сформировать умение исследовать и использовать различные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений

Теоретические сведения к практической работе

Рассмотрим системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) произвольной размерности, состоящие из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} . \qquad (*)$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов

системы (*), называется матрицей системы (ее размер – mхn), а вектор

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ (m-мерный)- столбцом (вектором) свободных членов. Матрицу

вида $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называют расширенной матрицей

системы (*). Любой набор значений неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, образующих

n-мерный вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, является решением системы

(*), если эти числа удовлетворяют всем уравнениям системы (т.е. превращают их в тождества). Очевидно, что $b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ при каждом *i=1,2,…,m* (*i-е* уравнение представляет собой скалярное произведение *i-й* строки матрицы системы на вектор *X*), и (*) можно переписать в виде

$$AX = B. \qquad (**)$$

Запись (**) называется "матричной (векторной) формой записи" системы (*).

Пример 1. Выписать матрицу коэффициентов и столбец свободных членов для СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}$.

Решение. Очевидно, что $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -7 \\ 6 & -3 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Записать СЛАУ, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Введем в рассмотрение вектор *X* и с каждым столбцом мысленно сопоставим неизвестное: с первым столбцом - x_1, со вторым -

x_2, с третьим - x_3, с четвертым - x_4. Окончательно нужная система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 + 7x_2 + 8x_4 = -4 \\ -2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}.$$

Классификация систем линейных алгебраических уравнений. Определения и основные теоремы. Если СЛАУ (*) имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной* (соответственно, система *несовместная*, если она вообще не имеет решений). Совместная система (*) называется *определенной,* если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если имеет более одного решения (в последнем случае у нее бесконечно много решений).

Матрицу системы (*) будем называть *приведенной* (а саму систему *канонической*), если в каждой *i-й* строке *(i=1,2,…,m)* есть элемент $a_{ij} = 1$, а все остальные элементы *j-го* столбца равны нулю. Такие элементы (и соответствующие им неизвестные) будем называть *ведущими,* а оставшиеся неизвестные назовем *свободными*.

Теорема 1 (Кронекера-Капелли). СЛАУ (*) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы совпадает с рангом ее расширенной матрицы, т.е выполняется равенство $r(A) = r(A|B)$.

Для совместной системы число $r = r(A) = r(A|B)$ назовем рангом системы.

Теорема 2 (о количестве решений). Пусть СЛАУ (*) совместна. Если ее ранг равен числу неизвестных ($r = n$), то система является определенной; если ранг системы меньше числа неизвестных ($r < n$), то исходная система – неопределенная.

Неопределенная система, как было отмечено, имеет бесконечное множество решений. Совокупность всех решений называется *общим решением системы.*

Алгоритм метода Гаусса. Цель рассуждений – путем элементарных преобразований свести исходную систему к равносильной, решение которой можно выписать непосредственно. Основными шагами метода Гаусса являются следующие.

I. *Прямой ход.* Выписать расширенную матрицу системы, путем элементарных преобразований свести ее к эквивалентной ступенчатой и определить ранги матрицы и расширенной матрицы системы. Если они различны, то исходная система несовместна, т.е. не имеет решений. Если $r(A) = r(A|B)$, то переходим к следующему этапу.

II. Сравнить ранг системы и число неизвестных, сделать вывод о количестве решений, учитывая теорему 2.

III. *Обратный ход*. Ступенчатую матрицу преобразовать к эквивалентной ей приведенной. Определить, какие неизвестные являются ведущими, какие – свободными.

IV. Выписать по полученной матрице систему, записать ответ (выразив, в случае неопределенной системы, ведущие элементы через свободные для построения общего решения).

Пример 3. Решить СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11. \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(A|B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 = C_3 - 2C_1]{C_2 = C_2 + 4C_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ -1 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{C_3 = C_3 + C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 10 & 0 & 0 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 = C_3 / 10} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Последняя матрица – ступенчатая. Ведущими неизвестными для нее являются x_2 в первой строке, x_3 во второй и x_1 в третьей. Очевидно, что система совместна и ее ранг равен 3: $r(A|B) = r(A) = 3 = r$. Поскольку число неизвестных также равно 3, исходная система является определенной.

Переходим к проведению преобразований по обратному методу Гаусса (теперь необходимо получать нули НАД ведущими элементами).

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & \vline & 4 \\ 11 & 0 & -6 & \vline & 27 \\ 1 & 0 & 0 & \vline & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_1=C_1-2C_3]{C_2=C_2-11C_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \vline & -2 \\ 0 & 0 & -6 & \vline & -6 \\ 1 & 0 & 0 & \vline & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[C_2=-C_2/6]{C_1=C_1-C_2/6} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \vline & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vline & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \vline & 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь составляем по последней матрице систему $\begin{cases} -x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$ и выписываем значения неизвестных в порядке их номеров: $X=(3;1;1)^T$. Это и есть ответ.

Пример 4. Для СЛАУ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 10x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 16 \end{cases}$ найти общее и два частных решения.

Решение. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатой.

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & \vline & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & \vline & 7 \\ 10 & 12 & 3 & 10 & \vline & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3=C_3-3C_1]{C_2=C_2-2C_1} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & \vline & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vline & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & \vline & 7 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & \vline & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & \vline & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vline & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $r(A|B) = r(A) = 3 = r$, число неизвестных $n=4$ и в соответствии с теоремой 6.2 исходная система является неопределенной. Ведущие неизвестные: x_3 в первой строке, x_1 во второй, x_4 в третьей. Свободное неизвестное - x_2. Обратным ходом преобразуем матрицу к приведенному виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & \vline & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & \vline & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vline & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_1=C_1-2C_2]{C_2=C_2-4C_3} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & \vline & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \vline & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vline & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1=C_1-3C_2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 & \vline & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \vline & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vline & 1 \end{pmatrix}.$$

Выписываем полученную систему и ведущие неизвестные выражаем через свободные: $\begin{cases} 4x_2 + x_3 = -8 \\ x_1 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -8 - 4x_2 \\ x_1 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$. Общее решение записываем в порядке нумерации неизвестных: $X_{об} = (3; \quad x_2; \quad -8-4x_2; \quad 1)^T$, x_2 - любое вещественное число.

Частное решение можно получить, если придать свободному неизвестному x_2 конкретное числовое значение. Например, при $x_2 = 0$ $X_ч = (3;0;-8;1)^T$, а при $x_2 = -1$ $X_ч = (3;-1;-4;1)^T$.

Теорема Крамера. Рассмотрим «квадратную» систему линейных уравнений (число неизвестных совпадает с числом уравнений) вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \qquad (*)$$

Теорема 3 (теорема Крамера). Если определитель матрицы системы (*) отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то данная система имеет единственное решение, причем значения неизвестных находятся по формулам

$$x_i = \frac{|A|_i}{|A|}, \quad i=1,2,\ldots,n$$

где $|A|_i$- определитель матрицы, полученной из исходной матрицы системы путем замены *i-го* столбца на столбец свободных членов.

Пример 5. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Выписываем A - матрицу системы и B - столбец свободных членов: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$. Далее вычисляем определители:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(16-4) - (-1)(12+16) - 1(-6-12) = 60 \neq 0;$$

$$|A|_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4(16-4) - (-1)(44+22) - 1(-22-44) = 180;$$

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 2(44+22) - 4(12+6) - 1(33-33) = 60;$$

$$|A|_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 2(44+22) - (-1)(33-33) + 4(-6-12) = 60.$$

По теореме Крамера $x_1 = \dfrac{|A|_1}{|A|} = \dfrac{180}{60} = 3$; $x_2 = \dfrac{|A|_2}{|A|} = \dfrac{60}{60} = 1$; $x_3 = \dfrac{|A|_3}{|A|} = \dfrac{60}{60} = 1$. Для проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: $2 \cdot 3 - 1 - 1 \equiv 4$, $3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \equiv 11$, $3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \equiv 11$. Все уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно.

Содержание практической работы

Задание 1. По расширенной матрице выписать СЛАУ.

1) $(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -2 & 5 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 15 \end{array}\right)$

2) $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -4 & 1 \\ 12 & 0 & 1 & 11 \\ 5 & 4 & 10 & -3 \end{array}\right)$

3) $(A|B)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 10 & 7 & 12 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 4 & -3 \\ -7 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$

4) $(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 8 & 6 & 8 & 6 \end{array}\right)$

Задание 2. Решить системы уравнений методом Крамера и методом Гаусса.

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \end{cases}$

Задание 3. Решить СЛАУ (в случае неопределенной системы выписывать общее и два любых частных решения).

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + 8x_3 = 20 \end{cases}$

Задание 4. Решить СЛАУ

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -7 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_4 = 2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

Задание 5. Решить СЛАУ

1. $$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 5x+8y-z=7 \\ 2x-3y+2z=9 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y+z=6 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} x+5y+z=-7 \\ 2x-y-z=0 \\ x-2y-z=2 \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=16 \\ 3x-2y-5z=12 \end{cases}$$

9. $\begin{cases} 8x+2y-8z=-24 \\ -2x-2y-10z=-48 \\ -2x+4y+8z=18 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x-y+2z=1 \\ x+4y-z=2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x-2y+4z=21 \\ 3x+4y-2z=9 \\ 2x-y-z-10 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x-y+z=12 \\ 5x+y+2z=3 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$